

EDITURA PARALELA 45



Redactare: Olimpia Filip, Daniel Mitran
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Marius Badea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

CHIRCIU, MARIN

Inegalități cu linii importante în triunghi : de la inițiere la performanță / Marin Chirciu. - Pitești : Paralela 45, 2018

Conține bibliografie

ISBN 978-973-47-2692-9

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2018

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Marin Chirciu

INEGALITĂȚI CU LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

DE LA INIȚIERE LA PERFORMANȚĂ

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®

supersucces



Editura Paralela 45

Cuprins

	Soluții
Capitolul 1 – Inegalități cu medianele triunghiului (m_a, m_b, m_c)	7 138
§ 1. 1. – Identități remarcabile cu laturile triunghiului	7 -
§ 1. 2. – Identități remarcabile cu mediane	12 138
§ 1. 3. – Inegalități remarcabile cu mediane	16 142
§ 1. 4. – Inegalități cu mediane	17 143
Capitolul 2 – Inegalități cu înălțimile triunghiului (h_a, h_b, h_c)	41 176
§ 2. 1. – Identități remarcabile cu înălțimi	41 176
§ 2. 2. – Inegalități cu înălțimi	51 183
Capitolul 3 – Inegalități cu bisectoarele triunghiului (l_a, l_b, l_c)	109 255
§ 3. 1. – Identități remarcabile cu bisectoare	109 255
§ 3. 2. – Inegalități remarcabile cu bisectoare	110 256
§ 3. 3. – Inegalități cu bisectoare	111 257
Capitolul 4 – Inegalități diverse	120 272
§ 4. 1. – Identități diverse cu mediane, înălțimi și bisectoare	120 272
§ 4. 2. – Inegalități cu mediane și înălțimi	121 273
§ 4. 3. – Inegalități cu mediane și bisectoare	129 287
§ 4. 4. – Inegalități cu bisectoare și înălțimi	133 292
§ 4. 5. – Inegalități diverse	136 297
<i>Bibliografie</i>	301

Inegalități cu medianele triunghiului (m_a, m_b, m_c)

„Încearcă să trăiești în așa fel încât să nu
prea te faci remarcant acolo unde ești, însă
să ți se simtă lipsa imediat ce dispari de
acolo.”

Victor Hugo

§ 1.1. Identități remarcabile cu laturile triunghiului

1. $IG^2 = \frac{1}{9}(p^2 + 5r^2 - 16Rr)$.
2. $IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$.
3. $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.
4. $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2p^2$.
5. $\sum a = 2p$.
6. $\sum a^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$.
7. $\sum a^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$.
8. $abc = 4Rrp$.
9. $\sum a^4 = 2[p^4 - p^2(6r^2 + 8Rr) + r^2(4R + r)^2]$.
10. $\sum a^5 = 2p^5 - 20p^3(Rr + r^2) + 10p(8R^2r^2 + 6Rr^3 + r^4)$.
11. $\sum a^6 = p^6 - 3p^4(4Rr - r^2) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3$.
12. $\sum bc = p^2 + r^2 + 4Rr$.
13. $\sum b^2c^2 = p^4 + p^2(2r^2 - 8Rr) + r^2(4R + r)^2$.
14. $\sum b^3c^3 = p^6 - p^4(12Rr - 3r^2) + 3p^2r^4 + r^3(4R + r)^3$.
15. $2\sum bc - \sum a^2 = 4r(4R - r)$.

$$16. \sum \frac{a}{b+c} = \frac{2(p^2 - r^2 - Rr)}{p^2 + r^2 + 2Rr}.$$

$$18. \sum \frac{b+c}{a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

$$20. \sum \frac{(b+c)^2}{bc} = \frac{p^2 + r^2 + 10Rr}{2Rr}.$$

$$22. \sum \frac{1}{bc} = \frac{1}{2Rr}.$$

$$23. \sum \frac{1}{a^2} = \frac{p^4 - 2p^2(4Rr - r^2) + r^2(4R+r)^2}{16R^2r^2p^2}.$$

$$24. \prod (p-a) = r^2 p.$$

$$26. \prod (b+c-a) = 8r^2 p.$$

$$28. \sum a(p-a) = 2r(4R+r).$$

$$30. \sum a(p-a)^3 = 4Rrp^2 - 2r^2(4R+r)^2.$$

$$31. \sum a(p-a)^4 = 2rp[2p^2R - r(24R^2 + 2Rr - r^2)].$$

$$32. \sum a^3(p-a) = p^2(4Rr + 6r^2) - 2r^2(4R+r)^2.$$

$$33. \sum a(p-b)(p-c) = 2rp(2R-r).$$

$$34. \sum a^2(p-a) = 4rp(R+r).$$

$$35. \sum a^2(p-b)(p-c) = 4rp^2(R-r).$$

$$36. \sum bc(a-b)(a-c) = p^4 + p^2(2r^2 - 16Rr) + r^2(4R+r)^2.$$

$$37. \sum a^3(p-b)(p-c) = 2pr[p^2(2R-3r) + r^2(4R+r)].$$

$$38. \sum bc(p-b)(p-c) = r^2[p^2 + (4R+r)^2].$$

$$39. \sum bc(p-a)(a+b)(a+c) = p^5 + p^3(2r^2 - 4Rr) + pr^3(4R+r).$$

$$40. \sum (p-a)^2 = p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

$$42. \sum (p-b)(p-c) = r(4R+r).$$

$$44. \sum a^2(p-a)^2 = 2r^2[(4R+r) - p^2].$$

$$45. \sum (p-b)^2(p-c)^2 = r^2[(4R+r)^2 - 2p^2].$$

$$46. \sum a^2(p-b)^2(p-c)^2 = 2r^2p^2(8R^2 + r^2 - p^2).$$

$$47. \sum a^3(a-b)(a-c) = 16r^2p(4R^2 + 5Rr + r^2 - p^2).$$

$$17. \sum \frac{1}{b+c} = \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{2p(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

$$19. \sum \frac{1}{a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4Rrp}.$$

$$21. \sum \frac{(b+c)^2}{b+c-a} = \frac{2p(R+2r)}{r}.$$

$$25. \prod (b+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr).$$

$$27. \sum a(b-c)^2 = 2p(p^2 + r^2 - 14Rr).$$

$$29. \sum a(p-a)^2 = 2rp(2R-r).$$

$$41. \sum (p-a)^3 = p(p^2 - 12Rr).$$

$$43. \sum (p-a) = p.$$

capitolul

2

Inegalități cu înălțimile triunghiului (h_a, h_b, h_c)

„Problema cea mai mare e că proștii sunt
absolut siguri de teoria lor, iar deștepții
sunt mereu nesiguri de ei.”

Bertrand Russel

§ 2.1. Identități remarcabile cu înălțimi

$$1. h_a + h_b + h_c = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}.$$

$$2. h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{2rp^2}{R}.$$

$$3. h_a h_b h_c = \frac{2r^2 p^2}{R}.$$

$$4. h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = \frac{p^4 + 2r^2 p^2 + r^2 (4R + r)^2}{4R^2}.$$

$$5. \prod (h_b + h_c) = \frac{rp^2 (p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2}.$$

$$6. \sum ah_a^2 = \frac{rp}{R} \cdot (p^2 + r^2 + 4Rr).$$

$$7. \sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}.$$

$$8. \sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{2r^2 p^2}.$$

$$9. \frac{1}{r^2} - \sum \frac{1}{h_a^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2r^2 p^2}.$$

$$10. \sum \frac{1}{h_a^3} = \frac{p^2 - 3r^2 - 6Rr}{4p^2 r^3}.$$

$$11. \frac{1}{r^3} - \sum \frac{1}{h_a^3} = \frac{3(p^2 + r^2 + 2Rr)}{4p^2 r^3}.$$

$$12. \sum \frac{1}{h_b + h_c} = \frac{p^4 + 2p^2 (8Rr + r^2) + r^2 (4R + r)^2}{4rp^2 (p^2 + r^2 + 2Rr)} \leq \frac{1}{2r}.$$

$$13. \sum \frac{1}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4r^2 p^2}.$$

$$14. \sum \frac{h_a}{p - a} = \frac{p^2 + (4R + r)^2}{2Rp}.$$

$$15. \sum \frac{p(p - a)}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 - 8Rr}{4r^2}.$$

$$16. \sum \frac{(p - b)(p - c)}{ah_a} = \frac{4R + r}{2p}.$$

$$17. \sum \frac{ah_a}{(p-b)(p-c)} = \frac{2p}{r}.$$

$$18. \sum \frac{h_b h_c}{(p-b)(p-c)} = 2 \left(\frac{r}{R} + 4 \right) \leq 9.$$

$$19. \sum \frac{(h_a - r)^2}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^2 + r^2 - 6Rr}{4R^2}.$$

$$20. \sum \frac{(h_a - r)^2 + h_b h_c}{(p-b)(p-c)} = \frac{p^4 + p^2(2r^2 - 20Rr) + 208R^2r^2 + 28Rr^3 + r^4}{16R^2r^2}.$$

$$21. \sum \frac{h_a^2}{(p-a)^2} = \frac{p^4 - 2p^2(16R^2 - r^2) + (4R + r)^4}{4R^2p^2}.$$

$$22. \sum \frac{(h_b + h_c)^2}{h_b h_c} = \frac{p^2 + r^2 + 10Rr}{2Rr}.$$

$$23. \sum h_a (h_b + h_c)^2 = \frac{rp^2(p^2 + r^2 + 10Rr)}{R^2}.$$

$$24. \sum \frac{h_b + h_c}{h_a} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

$$25. \sum \frac{h_b h_c}{h_b + h_c} = r \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \frac{9r}{2}.$$

$$26. \sum \frac{a}{h_b + h_c} = \frac{R}{p} \cdot \frac{5p^2 + r^2 + 4Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq \sqrt{3}.$$

$$27. \sum \frac{a^2}{h_b + h_c} = 4R \cdot \frac{p^2 - r^2 - Rr}{p^2 + r^2 + 2Rr} \geq 3R.$$

$$28. \sum \frac{h_a}{b+c} = \frac{p^4 + 2p^2(8Rr + r^2) + r^2(4R + r)^2}{4Rp(p^2 + r^2 + 2Rr)}.$$

$$29. \sum \frac{h_b + h_c}{a} = \frac{2p}{R}.$$

$$30. \sum \frac{r_b + r_c}{a} = \frac{p}{r}.$$

$$31. \sum \frac{h_b h_c}{a} = \frac{3rp}{R}.$$

$$32. \sum \frac{a}{h_b h_c} = \frac{3R}{rp}.$$

$$33. \sum \frac{h_b h_c}{a^2} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4R^2}.$$

$$34. \sum \frac{a^2}{h_b h_c} = \frac{2R}{r}.$$

$$35. \sum \frac{h_b h_c}{ah_a} = \frac{p}{R}.$$

$$36. \sum \frac{bc}{ah_a} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2rp}.$$

$$37. \sum \frac{ah_a}{bc} = \frac{p}{R}.$$

$$38. \sum \frac{h_a}{bc} = \frac{3}{2R}.$$