

UNU, DOI, TREI

David Berlinski (n. 1942) este profesor de matematică, filozof și scriitor. A obținut doctoratul în matematică la Princeton University. A predat matematica și filozofia la mai multe universități din Statele Unite și din Franța, iar în prezent locuiește la Paris. Este autorul altor câteva celebre cărți despre matematică: *A Tour of the Calculus*, *The Advent of the Algorithm*, *The Idea that Rules the World* și *Infinite Ascent: A Short History of Mathematics*.

DAVID BERLINSKI

UNU, DOI, TREI

Matematica absolut elementară

Traducere din engleză de
ILEANA CRĂCIUN și DAN CRĂCIUN

 HUMANITAS
BUCUREȘTI

Redactor: Marieva Ionescu
Coperta: Ioana Nedelcu
Tehnoredactor: Manuela Măxineanu
DTP: Radu Dobreci, Dan Dulgheru

Tipărit la Monitorul Oficial R.A.

David Berlinski
One, Two, Three. Absolutely Elementary Mathematics
Copyright © 2011 by David Berlinski
All rights reserved.

Harem Scene with Sultan, by Jean-Baptiste van Mour,
reproduced courtesy of Azize Taylan and with the assistance
of Okan Altiparmak.

© HUMANITAS, 2013, pentru prezenta versiune românească

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

BERLINSKI, DAVID

Unu, doi, trei: matematica absolut elementară / David Berlinski;
trad.: Ileana Crăciun, Dan Crăciun. – București: Humanitas, 2013
ISBN 978-973-50-4220-2

I. Crăciun, Ileana (trad.)

II. Crăciun, Dan (trad.)

51

EDITURA HUMANITAS

Piața Presei Libere 1, 013701 București, România

tel. 021/408 83 50, fax 021/408 83 51

www.humanitas.ro

Comenzi online: www.libhumanitas.ro

Comenzi prin e-mail: vanzari@libhumanitas.ro

Comenzi telefonice: 0372 743 382; 0723 684 194

Pentru Neal Kozodoy

Citim ca să aflăm ceea ce știm deja.

V.S. Naipaul

Introducere

Aceasta este o cărticică despre matematica absolut elementară (**MAE**); aşadar, o carte despre numere naturale, zero, numere negative şi fracţii. Nu este nici manual, nici tratat, dar nici o broşură de frunzărit în grabă. Mi-ar plăcea să cred că ea joacă rolul unei ancore pentru celelalte cărţi ale mele despre matematică.

Matematicienii şi-au imaginat întotdeauna că matematica seamănă cu o cetate, al cărei orizont este dominat de trei turnuri măreţe, ministerele unei puternice culturi intelectuale – întâmplător, a noastră. Aceste construcţii impunătoare sunt închinat Geometriei, Analizei şi Algebrei: studiul spaţiului, studiul timpului şi studiul simbolurilor şi al structurilor.

Impozante precum ziguratele babiloniene, aceste edificii emană un aer sacru.

Terenul comun pe care se înalţă este şi el sacru, sfinţit de pasul omului.

Acesta este domeniul matematicii absolut elementare.

Multe părţi ale matematicii sclipesc ispititor. Sunt exotice. Matematica elementară, pe de altă parte, evocă lucruri din viaţa obişnuită: plata facturilor, marcarea zilelor de naştere, partajul datoriilor, tăierea pâinii şi măsurarea distanţelor. Este ceva pământesc. Dacă mâine ar dispărea manualele şi, odată cu ele, toate comorile pe care le conţin, ar dura secole până să redescoperim analiza matematică, dar numai câteva zile ca să ne recuperăm datoriile şi, odată cu ele, toate numerele care le exprimă.

Așa cum este predată și uneori folosită, matematica elementară necesită o imersiune într-un univers aparent haotic. Este nevoie de răbdare, iar plăcerea se cere amânată. Virgulele din numerele zecimale par să o ia razna, numerele negative devin pozitive, iar fracțiile stau dintr-odată cu capul în jos.

Și cât fac trei pătrimi împărțite la șapte optimi?

Calculatorul electronic a permis aproape oricui să trateze astfel de întrebări cu o indiferență rece. Rapid, exact și simplu, el face mai bine toate operațiile cu care oamenii se chinuiau acum o sută de ani. Senzația că în matematica elementară lucrurile ne sunt familiare – pe jumătate proaspete în minte, chiar dacă pe jumătate uitate – este reconfortantă; la fel și calculatorul și computerul, în care avem o încredere excesivă, însă imperativele memoriei și tehnologiei ridică o întrebare evidentă: de ce ne-am osteni să învățăm ceea ce știm deja sau, cel puțin, credeam că știm?

Întrebarea se naște dintr-o confuzie. Tehnicile matematicii elementare sunt una, iar *explicațiile* lor, cu totul altceva. Oricine poate să adune două numere naturale – doi plus doi, de exemplu. Este însă mult mai greu să spui ce înseamnă adunarea și cum se justifică ea. Matematica explică sensul și oferă justificarea. Teoriile ce rezultă astfel se bazează pe aceeași combinație de artă și rafinament caracteristică oricărui demers intelectual complex.

Era atât de ușor ca lucrurile să fi stat altfel. În pofida unei necesități imperioase, matematica elementară putea să nu se lase exprimată într-o teorie coerentă, astfel că expunerea ei ar fi semănat cu o hartă în care drumurile se despart fără nici un rost ori se sfârșesc într-o harababură de nedescălit. Dar teoria prin care matematica elementară este explicată și tehnicile ei sunt justificate este un construct intelectual coerent. Este plină de forță. Are sens. Nu este niciodată contraintuitivă. Și, astfel, este adecvată obiectului său. Dacă atunci când vine vorba de cea mai simplă operație matematică – tot adunarea – rămâne

ceva ce nu înțelegem, aceasta se întâmplă numai pentru că nimic din natură (sau din viață) nu poate fi înțeles pe deplin, așa cum ne-am dori.

Cu toate acestea, teoria rezultată este fundamentală. Nu vă îndoiiți de asta!

Urmele educației din copilărie s-au pierdut în noapte. A rămas o singură idee, și astfel o singură idee predomină: *aceea că toate calculele și conceptele matematicii absolut elementare sunt guvernate de unicul act al numărătorii cu unu*. Este o analiză bazată pe o economie a mijloacelor și o reducere a experienței la esența sa, la fel de spectaculoasă ca toate obiectele științelor fizice.

Până la sfârșitul secolului al XIX-lea, acest lucru nu a fost înțeles. Și nici chiar un secol mai târziu încă nu se bucură de o largă înțelegere. Educația școlară este de puțin ajutor. „Vă rog să uitați lucrurile pe care le-ați învățat la școală“, a scris matematicianul german Edmund Landau în cartea sa *Fundamentele analizei matematice*, „nu le-ați învățat“.

Din când în când, le voi cere și eu cititorilor să uite câte ceva din ce au învățat.

Acum trebuie să vă împărtășesc un secret. Unul bine cunoscut tuturor celor care scriu despre (sau predau) matematică: nimănui nu-i place foarte mult această materie. Cel mai bine e s-o recunoaștem de la bun început. Aidoma jocului de șah, matematica are puterea de a induce obsesii, dar rareori afecțiuni.

De ce trebuie să fie așa? – mă refer la repulsia față de matematică.

Există două motive evidente. Matematica îl întâmpină pe novice cu o aură de straniețate, aproximativ proporțională cu numărul mare de simboluri pe care le utilizează. Există în simbolismul matematic ceva supărător, pentru că, deși solicită răbdarea, nu prea pare să promită și plăcere.

La ce bun atâta străduință?

Dacă aparatul simbolistic al matematicii o face să fie mai puțin apreciată, un alt impediment apare din pricina raționamentelor pe care le folosește. Matematica este o chestiune de demonstrație sau nu este nimic. Dar, cu certitudine, cere un anumit efort. Adeseori, chiar și în cea mai simplă demonstrație matematică există detalii extrem de importante și, ceea ce este încă și mai rău, o diferență înnebunitoare între structura complicată a demonstrației, pe de o parte, și lucrul simplu, evident care trebuie demonstrat, pe de altă parte. Nu există nici un număr natural între zero și unu. Cine s-ar îndoi de asta? Și totuși trebuie demonstrat, pas cu pas. Pe baza unor noțiuni dificile.

La ce bun atâta străduință?

Inevitabil, aici intervine o negociere subtilă. În matematică, e nevoie mai întâi de investiții înainte de a obține un câștig, iar ceea ce se câștigă nu este niciodată la fel de palpabil precum ceea ce s-a investit. Este un schimb pe care mulți oameni refuză să-l facă.

Într-adevăr, la ce bun atâta străduință?

Întrebarea nu este lipsită de substanță. Merită un răspuns.

În multe domenii ale matematicii, răspunsurile sunt evidente. Geometria este studiul spațiului, substanța misterioasă dintre puncte. A trata cu indiferență geometria înseamnă a trata cu indiferență lumea fizică. Acesta este unul dintre motivele pentru care elevii de liceu l-au acceptat dintotdeauna pe Euclid, fără tragere de inimă, dar cu senzația că erau forțați să învețe ceva ce chiar le era util.

Și algebra? Aversiunea pe care această materie o provoacă (în liceu) a fost întotdeauna compensată de senzația că simbolurile ei au o putere magică de a stăpâni curgerea și structura lucrurilor. Subiectele vechilor manuale erau muncile câmpului și îngurășmintele. Dar în cele moderne apar energia și masa. Einstein a avut nevoie *numai* de algebra de liceu pentru a crea teoria relativității restrânse, dar i-a trebuit *algebra* de liceu, fără de care s-ar fi rătăcit.

Analiza matematică a intrat serios în atenția matematicienilor europeni sub forma așa-numitului „calcul“. Ei au înțeles aproape de îndată că le-a fost dăruită cea dintâi și, în unele privințe, cea mai măreață dintre teoriile științifice. A te îndoi de importanța analizei matematice sau a minimaliza afirmațiile ei înseamnă a ignora cel mai bogat și cel mai dezvoltat corp de cunoștințe acumulat de specia umană.

Da, da. Totul este înălțător, dar matematica absolut elementară? Nu cu mult timp în urmă, matematicianul francez Alain Connes a inventat termenul de „matematică arhaică“ pentru a descrie spațiul în care ideile erau în stare embrionară și încă neseperate în discipline diferite. Este o expresie elegantă și o descriere potrivită. Și ne arată de ce matematica elementară, atunci când este privită corect, are măreția absolutului. Este fundamentală și, aidoma limbajului, un act instinctiv al speciei umane.

O *teorie* a matematicii absolut elementare este o explicație în termeni moderni a ceva înrădăcinat în imaginație; dezvoltarea ei de-a lungul secolelor reprezintă un extraordinar exercițiu al conștiinței de sine.

Iată justificarea străduinței: sentimentul că, privind un loc vechi și familiar prin ochii matematicianului, putem câștiga puterea de a-l vedea pentru prima oară.

Și asta nu e puțin lucru.

Paris, 2010

O oaie, două oi, trei. Urmează lâna...

NUMERELE

Numerele naturale 1, 2, 3, ... joacă un dublu rol în activitatea noastră obișnuită. Fără ele, nu ar putea să existe numărătoarea și, în consecință, nici răspuns la întrebarea *Cât de multe?* Un om care nu poate spune dacă privește o oaie sau două oi nu poate să *identifice* oaia. Se holbează pur și simplu la o grămadă de lâna pe niște copite. Numerele naturale sunt acelea care rezolvă absența noțiunii de oaie. „Crearea numerelor“, remarca Thierry de Chartres în secolul al XII-lea, „a însemnat crearea *lucrurilor*“.

Așa cum numărătoarea înzestrează lucrurile cu identitate, tot ea impune și diferența dintre ele. Trei oi sunt trei *lucruri*. În natură, numerele naturale sunt expresia diviziunii și a caracterului distinct. La urma urmelor, între numărul unu și numărul doi nu există absolut nimic, așa cum nu există nimic între lucrurile care sunt distincte, oricât de mult s-ar putea asemena ele sub diferite aspecte. Caracterul discret al numerelor naturale este la fel de absolut ca și cel impus de suprafața pielii noastre, care permite contactul, dar, vai, nu și contopirea.

Există, desigur, în lume și anumite entități care nu pot fi numărate – noroiul, de exemplu. Cuvântul „nroi“ pare să desemneze fără deosebire noroiul oriunde se află și sub orice formă. Dar impulsul intelectual de a subordona experiența numărătorii este atât de puternic, încât limba furnizează

instrumentele cu ajutorul cărora până și noroiul poate fi făcut numărabil – o *pată* de noroi, un *strop* sau un *morman*, după care urmează o *pată*, *doi* stropi sau *trei* mormane. Aceleași *unu*, *doi* și *trei* folosite la numărarea oilor sunt, de asemenea, folosite în sortarea lor. Numerele naturale îl ajută pe ciobanul cu pielea tăbăcită, ai cărui obraji supti se încrețesc peste doi dinți de aur, să-și ordoneze oile și totodată viața.

Prima este a mea, *jupâne*, cum spun ciobanii, *a doua* este a ta și *a treia* este a lui.

ARTA SCRIBULUI

Sumerienii și-au istruit copiii în **MAE** cu peste cinci mii de ani în urmă, pe când soarele deșertului era încă nou și nimic nu era încă vechi. Copiilor sumerieni le erau predate lucrurile de bază; profesorii lor sesizaseră elementele esențiale. Nu le-a fost ușor. Odată trecuți anii copilăriei, scribii sumerieni au studiat ani buni pentru a scrijeli pe plăcuțe de argilă registre fiscale, creanțe comerciale, coduri juridice, tranzacții imobiliare. Ei au lăsat în urma lor dovada unei cunoașteri profunde a matematicii, pentru prima oară în istorie.

Nu aveau în nici un caz sentimentul supărător al inutilității meseriei lor. „Arta scribilor“, scria unul, „este mama învățaturii“.

Numai scribii, adăuga el, puteau „să scrie [să graveze] o stelă, să traseze hotarele unui teren, să facă socoteli“.

Textul este apoi întrerupt.

Și urmează un cuvânt izolat la stânga și la dreapta, care sugerează măreția intelectuală a scribului: ...*palatul*...

La sfârșitul mileniului al treilea î.Hr., imperiul sumerian a fost năpădit de nisipurile deșertului, învins până la urmă de timp. Purtată de vânt, presupun, sau de vreun alt curent de gândire, cunoașterea profundă a **MAE** a fost dobândită de mandarinii chinezi, intoxicați de noua lor putere asupra pictogramelor, și

descoperită apoi din nou de către babilonieni, astfel încât este prezentă pretutindeni în lumea antică.

Societățile au folosit **MAE** în felul lor și pentru propriile lor scopuri. Însă fiecareia i-a scăpat câte ceva și nici o societate, nici măcar a noastră, nu a cunoscut-o și nu o cunoaște pe deplin.

UN OM DEOSEBIT

Leopold Kronecker s-a născut în 1823 la Liegnitz, un orașel din Prusia orientală. Cutremurat de sunetul tancurilor rusești către sfârșitul anului 1944, Liegnitz este acum cunoscut drept Legnica și se află în Polonia. Prusia orientală a dispărut.

Figura lui Kronecker nu este ușor de distins într-o fotografie. Lumina puternică și expunerea prelungită au întunecat și adâncit fiecare trăsătură a feței. Ridurile aspre sugerează o legătură de sânge nerecunoscută între Leopold Kronecker și generalul William Tecumseh Sherman. Cei doi bărbați au fruntea înaltă și părul tuns scurt, aproape *en brosse**, ochii adânciți în orbite și melancolici. Prin toate aceste trăsături, Kronecker este pe deplin prusac și auster, dar nasul lui și-a asumat o viață proprie, inconfundabilă, curbându-se mândru de la rădăcină spre vârful coroiat.

Menționez acest lucru nu ca să fac haz de nasul altui om – la urma urmelor, și eu am un nas care mă dă de gol –, ci pentru că exprimă într-un fel capacitatea lui Kronecker de a se deosebi de alți matematicieni, deși face parte din rândurile lor. Kronecker a fost un personaj rar în istoria gândirii, un sceptic *matematic*, care nu era dispus să aprobe idei fără să le înțeleagă pe deplin și mereu grăbit să tragă concluzia că nu poate înțelege pe deplin majoritatea ideilor. Dacă Kronecker cel Ursuz s-a remarcat spunând *nu – nu* numerelor negative, *nu* numerelor

* Limba franceză, în original: periuță (*n. tr.*).

reale, *nu* mulțimilor –, s-a remarcat și prin aceea că a spus *da* numerelor naturale, un mare *da* plin de vitalitate adresat acestor obiecte străvechi ale gândirii și experienței, un *da* care se revarsă ca un torent, cât să cuprindă orice construcție matematică ce revine la numerele naturale într-o serie finită de pași.

Kronecker, omul care a spus de o mie de ori *nu*, și Kronecker, omul unui singur *da*, se contopeau într-o personalitate singulară: delicată, suplă, împăcată cu sine.

Pe când nu împlinise încă treizeci de ani, Leopold Kronecker a urmat o carieră în afaceri ca administrator al domeniilor unchiului său, din Prusia orientală. Era deosebit de dotat pentru treburile practice și, în opt ani, a ajuns un om bogat. Ulterior, și-a cumpărat în Berlin un conac superb și, după ce s-a căsătorit cu fiica unchiului său, Fanny Prausnitzer, l-a transformat într-un centru de cultură și rafinament.

Bogăția l-a făcut pe Kronecker să fie indiferent față de marile jocuri ale catedrelor de matematică, pe care le ocupau matematicienii de frunte ai Europei, privind cu jind câteva fotolii cu pernuțe care încă emanau căldura șezuturilor unor profesori răposați. Când muzica se oprea, se încăierau necuviincios pentru locul vacant. Inevitabil, cei mai mulți erau dezamăgiți. Matematicieni de geniu, precum Georg Cantor, au așteptat ani de zile să fie chemați la Berlin și au fost amarnic de ofensați că nu s-a întâmplat așa.

Herr Kronecker nu a manifestat un foarte mare interes în a deveni Herr Professor. El nu avea nevoie să se lupte pentru scaunul său. Sau pentru cina sa. Ceea ce-i lipsea era dreptul de a ține prelegeri la Universitatea din Berlin, deși își dorea foarte mult. Dedicat subiectelor legate de teoria numerelor, funcțiile eliptice și algebră, lucrările lui erau remarcabile din toate punctele de vedere, fără să fie în nici un fel revoluționare. Când a fost ales membru al Academiei din Berlin, în 1861, a câștigat dreptul de a preda la universitate.

Cuprins

Introducere 9

- 1 Numerele 15 Arta scribului 16 Un om deosebit 17 În orice minte omenească 19 Neveste, capre, numere 21 Lucrarea lui Dumnezeu 22
- 2 Pozițiile la putere 24 Un om pentru toate simbolurile 25 Notăția pozițională 26
- 3 Mulțimi 30 Unică în felul său 32 Paradox 33
- 4 Certitudine 34 Nimic din ce este omenesc nu este sigur 35 O excepție față de observația lui Ovidiu 36 Cel mai mare 38 Ce-ar fi dacă... 39 Punctul de echilibru 41
- 5 Un maestru glacial 45 Ruina 48
- 6 Axiome pentru numere 51 Al doilea congres internațional 53 Axiomele lui Peano 54 Il gattopardo 57
- 7 Succesiunea 59 Pornind de la zero, adunând câte unu 61 O moarte amânată 63 Jos cu Euclid 64
- 8 Adunarea 67
- 9 Definiția regresivă 71 O notație inedită 72 Trei condiții 75 În spațiu și timp 76 Patru plus trei 77
- 10 Înmulțirea 80 Definiția înmulțirii 82 Produsul dintre trei și doi 84 Ridicarea la putere 84 Puterea exponențială 86
- 11 Marele dicționar 89 De la baza zece 91

- 12 Recursivitatea 93 Cuvenite mulțumiri 95 Detașarea 96 Teorema recursivității 97 Ce face 99
- 13 Oamenii legii 100 Cum se schimbă lucrurile 101 Un englez independent 102 Al patrulea wrangler 103
- 14 Matematica procedurală 105 Actorii principali 106
- 15 Frăția transcendentă 112 Inducția 112 Căderea pieselor de domino 114 Roata cu clichet 115 Buna ordonare 118
- 16 Fervoare 121
- 17 Demonstrația 126
- 18 Cealaltă față a lui zero 131 Partea întunecată 132 Ghinion, Pierre 134 Distanțe 135 Datorii 136
- 19 Extragerea 139 O simetrie distrusă 140 Sistemul numerelor întregi 141 O identitate negativă 142
- 20 Fiorul 145 Algebra 146 Vechime 146 Noutate 147 Mijloace de ascensiune 148 *Der Nöther* 150
- 21 Esența inelelor 154 Inelul 156 Condițiile 157 Traducerea 157 O acumulare de afirmații 157 Schiță rapidă, fără unele detalii 158
- 22 Limbajul semnelor 161 O aliniere efemeră 165 Partea cealaltă 166
- 23 Din lumea antică și înapoi 168 Identificarea indirectă 169 Dublu sens 171 Comunitatea de interese 172 Inelul polinoamelor 174 Importanța identității 175 Toate posturile de frontieră 177
- 24 Împărțirea, ultima operație 180 Parte dintr-un întreg 181 Unu pentru doi 182 Ce nu sunt fracțiile 184 Pe de o parte 185 Pe de altă parte 186 *Contra mundum* 189
- 25 Câmpul numerelor 193 Dumnezeu știe cum 194 Identitate și invers 196 N-a mai rămas nimic de demonstrat 198 Sfârșitul poveștii 201
- Concluzii 203
- Mulțumiri* 207