Cuprins

Pe copertă: Hans Holbein cel Tânăr (1498-1543), *Ambasadorii* (1533, detaliu)
Foto autor: Dinu Lazăr

www.polirom.ro

Editura POLIROM
Iași, B-dul Carol I nr. 4; P.O. BOX 266, 700506
București, Splaiul Unirii nr. 6, bl. B3A, sc. 1, et. 1,
sector 4, 040031, O.P. 53, C.P. 15-728

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României:

SUCEAVĂ, BOGDAN

Memorii din biblioteca ideală / Bogdan Suceavă. – Iași: Polirom, 2013

ISBN print: 978-973-46-3442-2
ISBN ePub: 978-973-46-3649-5
ISBN PDF: 978-973-46-3650-1

821.135.1-94

Printed in ROMANIA

Bogdan Suceavă

MEMORII DIN BIBLIOTECA IDEALĂ

POLIROM
2013

Din acest studiu de teren aveau să se nască reflecțiile care au condus la o contribuție teoretică extraordinară inclusă în lucrarea publicată în 1827, initulată *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[1]. În această lucrare, Gauss introduce o definiție a curburii unei suprafețe într-un punct dat.

Fără nici o aspirație la rigoare în cele ce urmează, vom descrie aici ideea primei definiții date de Gauss astfel. Să considerăm acum o suprafață fără colțuri (de exemplu, conturul unui deal lipsit de stânci) și un punct oarecare pe ea. Ne propunem să definim curbura în acel punct. Să ne imaginăm că razele soarelui coboară pe verticala locului. Să ne imaginăm că avem un mic paralelogram care se sprijină pe respectiva suprafață doar într-un colț, în acel plan perpendicular pe verticala locului. Și acum, cu multă grijă, să măsurăm aria *umbrei* pe care paralelogramul o lasă pe suprafață. Apoi calculăm raportul dintre această arie a umbrei și aria paralelogramului. Atunci când începem să restrângem paralelogramul, făcându-l tot mai mic, acel raport va avea ca limită o cantitate pe care Gauss a definit-o drept curbură a suprafeței.

Ideea e extraordinară: nici Euler, nici Monge sau Meusnier nu s-au gândit la ea. Cantitatea respectivă a fost în schimb studiată de Olinde Rodrigues (1794-1851), un student al lui Monge de la École Polytechnique, într-o lucrare scrisă în 1815[2].

---

1. Versiunea românească poate fi găsită pe pagina web a profesorului Liviu Ornea, la http://gta.math.unibuc.ro/pages/teachlec.html.
2. Dar Rodrigues nu a demonstrat că acel raport este neschimbat la transformări rigide ale suprafeței. Fără acest pas nu se poate vorbi despre o bună înțelegere a curburii unei suprafețe.

Dar Gauss nu se oprește aici. Ne amintim de studiul lui Euler privind distribuția curburii liniare, adică a curburii acelor curbe date de intersecțiile dintre o suprafață și planele perpendiculare pe suprafață trecând prin punctul dat. Euler a arătat că aceste curburi pot lua orice valori între o valoare minimă k_1 și o valoare maximă k_2. Vom numi aceste două valori extreme *curburi principale* ale suprafeței.

Gauss a demonstrat că acea curbură a suprafeței, așa cum am prezentat-o în definiția de mai sus, este egală cu produsul dintre k_1 și k_2. Așadar, curbura gaussiană a suprafeței într-un punct dat e produsul curburilor principale. Multe manuale de geometrie diferențială preferă să pornească de la această proprietate, în chip de definiție a curburii, și să obțină celelalte înfățișări ale curburii drept consecințe.

Astfel, curbura unei sfere este pătratul curburii ecuatorului ei. Curbura unui cilindru circular va fi zero, pentru că avem de calculat produsul dintre curbura unui cerc și cea a unei drepte, generatoarea cilindrului, iar dreapta are curbura zero. Din pricina aceasta cilindrul este *plat* (în contextul studiului curburii, „plat" înseamnă că are curbura nulă în fiecare punct al suprafeței). Intuiția noastră susține foarte bine imaginea aceasta: dacă decupăm cilindrul de-a lungul unei generatoare, îl putem desfășura pe masă fără nici o deformare. Dacă Pământul ar fi cilindric, în loc să fie sferic, n-am avea nici o problemă să realizăm hărți de perfectă acuratețe și să le desfășurăm pe masă fără a deforma realitatea reprezentată.

În fine, studiul lui Gauss mai include un rezultat surprinzător. Dacă desfășurăm fără deformare o suprafață pe o altă suprafață (harta Hanovrei pe masa ducelui), atunci curbura suprafeței originale nu se schimbă. O coajă de portocală nu se poate întinde „plat" pe masă. Sau, spus în limbaj matematic, curbura rămâne neschimbată la transformări rigide. Cu alte cuvinte, ca să desenăm o hartă exactă ar trebui să proiectăm un fragment de sferă (Pământul!) pe o bucată de plan (masa). Și asta e tot ce putem face, câtă vreme ne propunem să citim hărțile pe o reprezentare planară. Pentru o hartă ideală, am avea nevoie de o reprezentare sferică.

Problema cartografiei îl preocupase înainte și pe Euler. Între lucrările care au rămas de la el, din perioada când se afla la St. Petersburg, se numără și una în care studiază o problemă de proiecție: cum anume să se reprezinte cel mai bine harta Imperiului Rus.

Gauss avea să numească rezultatul care se referă la curbura ce rămâne neschimbată la transformări rigide *teorema remarcabilă* (în original, în latină: *egregium*).

*

Una dintre cele mai interesante reflecții asupra ideii de curbură a aparținut Sophiei Germain (1776-1831).

Pentru istoria ideii de curbură, contribuția Sophiei Germain a fost de o importanță crucială. Memoriul ei publicat în 1831 include următorul pasaj, care conține motivația problemei: „Întrucât curbura e comparată cantităților dinamice, nu putem disimula faptul că ea e în mod tacit tratată ca o cantitate de același fel. Suprafețele nu mai sunt deci considerate doar în raport cu ele însele, și nu e vorba doar de proprietățile lor particulare, nici de cele care sunt comune unei clase dintre ele. E nevoie așadar să se definească acea cantitate dinamică născută din curbură. Dar această cantitate nu depinde de figura suprafețelor, ci de o condiție care e satisfăcută de un număr infinit de suprafețe diferențiale. De aici se nasc distincțiile necesare, dar a căror folosință nu a fost consacrată încă; sunt noțiuni simple, dar care n-au fost niciodată exprimate efectiv. Dacă, de la începutul acestui memoriu, am fi fost obligați să explicăm atât aceste noțiuni, cât și distincțiile care le fac indispensabile, sarcina ne-ar fi fost extrem de dificilă. Prin ordinea firească a ideilor, ne găsim într-o situație mult mai favorabilă.

E convenabil să examinăm pentru început care sunt curburile liniare datorate intersecțiilor planelor duse prin unul dintre punctele suprafeței; iar cercetările pe care Euler ni le-a lăsat oferă, în această privință, ajutorul pe care l-am putea dori“.

În prima secțiune a lucrării ei, Sophie Germain reamintește rezultatele lui Euler pe care își va baza discuția. Partea interesantă urmează abia mai apoi, acolo unde, așa cum scrie ea, „vom expune câteva considerente noi asupra curburii suprafețelor. Studiul felului cum este dispusă curbura va scoate în evidență numaidecât existența unei cantități medii dependente de curbură, dar comună unui număr infinit de suprafețe de figuri diferite.

Cititorul va vedea că în problemele de natură dinamică, unde curbura e luată în considerare, dacă în timp ce suma forțelor născute din această curbură e independentă de figura suprafeței, dimpotrivă – repartizarea acelorași forțe în jurul punctului dat depinde de această figură; astfel încât legea de repartizare a curburii curbelor în jurul unui punct fixat pe suprafață ne dă o corespondență deplină cu ceea ce se știe despre compoziția forțelor care acționează în jurul acestui punct".

Partea surprinzătoare a descoperirii făcute de Sophie Germain este enunțată în prima ei Propoziție (nu a numit-o teoremă, probabil din aceeași modestie care transpare de-a lungul întregului text), al cărei enunț este următorul: „Oricare ar fi poziția a două plane normale, perpendiculare între ele, duse printr-un punct dat al unei suprafețe oarecare, suma curburilor conținute în aceste două plane va fi întotdeauna aceeași. Ca urmare, această sumă va fi egală cu cea a curburilor principale".

Din acest motiv, inspirat mai degrabă din considerente de natură fizică, Sophie Germain propune pentru termenul de curbură „media aritmetică a acestor așa-numite curburi principale". Mai precis, dacă ne amintim că valorile k_1 și k_2 desemnau minima și maxima curburilor secțiunilor normale printr-un punct dat, Sophie Germain propune spre studiu cantitatea $(k_1 + k_2) / 2$. Mai mult, stabilește în memoriul ei cum anume se distribuie curburile în jurul unui punct pe o suprafață. Rezultatul ei este următorul: „Există, în general, în jurul unui punct dat, patru direcții după care curbele conținute în planele normale sunt similare. În ceea ce privește planele principale, numărul curburilor similare se reduce la două".

În fine, asta ne permite să vedem cum arată așa-numitele sfere de curbură. E vorba despre acele sfere care ar aproxima cel mai bine suprafața studiată într-un punct dat. Ne-am dori să avem o imagine la fel de intuitivă ca și figura pe care am obținut-o atunci când am descris cercul de curbură (sau, cum a preferat Leibniz să-l numească, cercul osculator). Abia dacă am avea această interpretare am simți că am făcut, odată cu acest memoriu, un pas mai departe față de ceea ce știam de la Leonhard Euler. Iată și interpretarea, care nu lipsește din memoriul publicat de Sophie Germain: „E evident, în fapt, că fiecare dintre curburile principale găsindu-se numai de două ori în conturul întreg al punctului dat și fiind prin urmare conținute în prelungirea unuia și aceluiași plan, sferele descrise de aceste raze ating, dar nu taie suprafața; în timp ce, reciproc, sferele descrise de razele de valori cuprinse între aceste limite [date de inversele valorilor principale] taie suprafața".

*

Să considerăm o suprafață în spațiul tridimensional obișnuit. Am văzut că teorema remarcabilă a lui Gauss stabilise faptul că transformările rigide nu schimbă curbura gaussiană. Așadar, putem spune că există mărimi geometrice care țin de geometria suprafeței, iar nu de cea a spațiului ambient, și curbura gaussiană este una dintre ele. Mărimile geometrice care sunt aduse pe suprafață din geometria spațiului exterior nu țin de geometria intrinsecă a suprafeței. Terminologia numește aceste două categorii de cantități *mărimi intrinseci*, respectiv *extrinseci*. Astfel, curbura gaussiană este intrinsecă, dar curbura medie este extrinsecă. Nu ne propunem să includem aici argumentul tehnic, dar vom face referință mai departe la acest lucru, în capitolul intitulat „Despre curbură (partea a doua)".