



# Cuprins

<b>1. Elemente de logică matematică și teoria mulțimilor .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Relații și operații cu mulțimi (recapitulare) .....</b>	<b>3</b>
1.1. Relații .....	3
1.2. Operații cu mulțimi .....	3
<b>2. Mulțimea numerelor reale .....</b>	<b>4</b>
2.1. Mulțimea numerelor naturale; operații algebrice .....	4
2.2. Mulțimea numerelor întregi; operații algebrice .....	6
2.3. Mulțimea numerelor raționale; operații algebrice .....	7
2.4. Mulțimea numerelor reale .....	11
2.5. Intervale de numere reale .....	25
*2.6. Inegalități remarcabile .....	29
<b>3. Elemente de logică matematică .....</b>	<b>37</b>
3.1. Enunț, propoziție, valoare de adevăr .....	37
3.2. Operații logice elementare în mulțimea propozițiilor .....	38
3.3. Predicte. Cuantificatori .....	44
3.4. Echivalență și corelarea operațiilor logice elementare cu operațiile și relațiile cu mulțimi .....	49
3.5. Condiții necesare, condiții suficiente .....	51
<b>4. Tipuri de raționamente logice .....</b>	<b>54</b>
4.1. Legea dublei negații .....	54
4.2. Legea terțului exclus .....	54
4.3. Reducerea la absurd .....	54
4.4. Inducția matematică .....	55
<b>2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale: siruri, progresii.</b>	
<b>Probleme de numărare .....</b>	<b>61</b>
<b>1. Modalități de a defini un sir; siruri măginitate, siruri monotone .....</b>	<b>61</b>
1.1. Siruri; generalități .....	61
1.2. Modalități de a defini un sir .....	62
1.3. Siruri mărginite .....	63
1.4. Siruri monotone .....	64
<b>2. Progresii aritmetice .....</b>	<b>69</b>
2.1. Definirea progresiei aritmetice .....	69
2.2. Proprietățile progresiei aritmetice .....	70
2.3. Formula termenului general al unei progresii aritmetice .....	71
2.4. Formula sumei primilor $n$ termeni ai unei progresii aritmetice .....	72
<b>3. Progresii geometrice .....</b>	<b>76</b>
3.1. Definirea progresiei geometrice .....	76
3.2. Proprietățile progresiei geometrice .....	77
3.3. Formula termenului general al unei progresii geometrice .....	78
3.4. Formula sumei primilor $n$ termeni ai unei progresii geometrice .....	79

<b>4. Probleme de numărare .....</b>	<b>83</b>
4.1. Completarea unui sir cu încă $p$ termeni, $p \in \mathbb{N}^*$ .....	83
4.2. Numărarea termenilor dintr-un sir .....	83
4.3. Determinarea termenului de pe locul $n$ , $n \geq 1$ , dintr-un sir .....	84
4.4. Aflarea sumei primilor $n$ termeni dintr-un sir .....	84
4.5. Numărarea unor numere care au o anumită proprietate .....	85
4.6. Aflarea poziției ocupate de un număr într-un sir .....	87
4.7. Numărarea aparițiilor unei cifre în scrierea unui număr .....	88
<b>3. Funcții, lecturi grafice .....</b>	<b>91</b>
<b>1. Reper cartezian, produs cartezian .....</b>	<b>91</b>
1.1. Reper cartezian .....	91
1.2. Produsul cartezian a două mulțimi .....	92
1.3. Drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$ , $m \in \mathbb{R}$ .....	94
<b>2. Funcții .....</b>	<b>95</b>
2.1. Noțiunea de funcție .....	95
2.2. Modalități de a descrie o funcție .....	96
2.3. Funcții egale .....	97
2.4. Prelungirea și restricția unei funcții .....	98
2.5. Graficul unei funcții .....	98
2.6. Imaginea și preimaginea unei funcții .....	98
2.7. Funcția identică .....	100
2.8. Lecturi grafice .....	100
<b>3. Funcții numerice. Operații cu funcții numerice .....</b>	<b>104</b>
3.1. Operații cu funcții numerice .....	104
3.2. Graficul unei funcții numerice .....	104
3.3. Intersecția graficului cu axele de coordonate .....	105
3.4. Funcții mărginite .....	105
3.5. Funcții pare și funcții impare .....	106
3.6. Simetria graficului unei funcții față de drepte de forma $x = m$ , $m \in \mathbb{R}$ , sau față de puncte oarecare din plan .....	106
3.7. Funcții monotone .....	107
3.8. Funcții periodice .....	108
<b>4. Compunerea funcțiilor .....</b>	<b>109</b>
<b>*5. Inversa unei funcții .....</b>	<b>112</b>
<b>4. Funcția de gradul întâi .....</b>	<b>115</b>
<b>1. Definiția funcției de gradul întâi și reprezentarea geometrică a graficului .....</b>	<b>115</b>
<b>2. Monotonia și semnul funcției de gradul întâi .....</b>	<b>117</b>
<b>3. Inecuații de forma <math>ax + b \geq 0</math>, <math>ax + b \leq 0</math>, <math>ax + b &gt; 0</math>, <math>ax + b &lt; 0</math> .....</b>	<b>119</b>
3.1. Semnul unui produs .....	120
3.2. Semnul unui raport .....	121
<b>4. Pozițiile relative a două drepte în plan .....</b>	<b>122</b>
<b>5. Sisteme de forma <math>\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}</math>, <math>a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}</math> .....</b>	<b>122</b>
5.1. Metode de rezolvare .....	123
<b>6. Sisteme de inecuații de gradul întâi .....</b>	<b>125</b>

<b>5. Funcția de gradul al doilea .....</b>	<b>130</b>
1. Definiția funcției de gradul al doilea .....	130
2. Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul al doilea .....	131
3. Relațiile lui Viète .....	134
4. Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}, s, p \in \mathbb{R}$ .....	135
<b>6. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al doilea .....</b>	<b>137</b>
1. Monotonia funcției de gradul al doilea .....	137
2. Semnul funcției de gradul al doilea .....	139
3. Inecuații de gradul al doilea .....	141
3.1. Exemple de rezolvare .....	141
3.2. Alte tipuri de inecuații de gradul al doilea .....	142
3.3. Imagini și preimagini ale unor intervale .....	143
4. Sisteme de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y, a, b, c, m, n \in \mathbb{R} \end{cases}$ .....	144
4.1. Metoda de rezolvare .....	144
4.2. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă .....	145
4.3. Interpretarea geometrică .....	145
4.4. Sisteme reductibile la cele studiate .....	147
5. Sisteme de forma $\begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 = y \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 = y \end{cases}, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ .....	148
5.1. Metoda de rezolvare .....	148
5.2. Interpretarea geometrică .....	148
<b>7. Vectori în plan .....</b>	<b>154</b>
Introducere .....	154
1. Vectori .....	154
1.1. Segment orientat, relația de echipolență, vectori, vectori coliniari .....	154
1.2. Direcție .....	155
1.3. Sens .....	156
1.4. Lungime .....	156
1.5. Segmente echipolente. Vectori .....	157
2. Operații cu vectori .....	159
2.1. Adunarea vectorilor .....	159
2.2. Înmulțirea unui vector cu un număr real .....	161
2.3. Raportul în care un punct împarte un segment orientat .....	162
2.4. Descompunerea unui vector după două direcții date .....	162
<b>8. Coliniaritate, concurență, paralelism – calcul vectorial în geometria plană ....</b>	<b>165</b>
1. Vectorul de poziție al unui punct .....	165
2. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat. Teorema lui Thales; condiții de paralelism .....	167
2.1. Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat .....	167
2.2. Teorema lui Thales .....	168
2.3. Condiții de paralelism .....	169

<b>3. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi.</b>	169
Concurența medianelor unui triunghi .....	169
3.1. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi .....	169
3.2. Concurența medianelor .....	170
<b>4. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi .....</b>	171
4.1. Teorema bisectoarei .....	171
4.2. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi .....	173
<b>5. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester. Concurența înălțimilor .....</b>	174
5.1. Relația lui Sylvester și aplicații .....	174
5.2. Concurența înălțimilor .....	175
<b>6. Teorema lui Menelaos; teorema lui Ceva .....</b>	176
6.1. Teorema lui Menelaos și aplicații .....	176
6.2. Teorema lui Ceva și aplicații .....	177
<b>9. Elemente de trigonometrie .....</b>	184
1. Cercul trigonometric .....	184
2. Funcții trigonometrice definite pe $[0, 2\pi]$ , respectiv $[0, \pi]$ .....	185
3. Funcții trigonometrice definite pe $\mathbb{R}$	190
3.1. Funcțiile sinus și cosinus .....	190
3.2. Funcția tangentă .....	193
3.3. Funcția cotangentă .....	194
4. Formule de reducere la primul cadran .....	196
5. Formule trigonometrice (pentru sume, diferențe) .....	198
6. Formule trigonometrice pentru dublul unui număr .....	200
7. Formule pentru $\sin x$ și $\cos x$ în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .....	201
8. Formule pentru transformarea sumei în produs .....	210
9. Formule pentru transformarea produselor de funcții trigonometrice în sume sau diferențe .....	211
<b>10. Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană .....</b>	222
1. Produsul scalar a doi vectori .....	222
1.1. Definiție, proprietăți .....	222
1.2. Teorema cosinusului .....	222
*1.3. Teorema lui Stewart .....	222
1.4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic .....	222
2. Aplicații vectoriale și trigonometrice în geometrie .....	222
2.1. Teorema sinusurilor .....	222
2.2. Rezolvarea triunghiului oarecare .....	222
2.3. Calculul razei cercului înscris și a cercului circumscris triunghiului .....	222
2.4. Calculul lungimilor unor segmente importante din triunghi .....	232
2.5. Calcul de arii .....	232
<b>11. Exerciții și probleme recapitulative .....</b>	233
Indicații și răspunsuri .....	252
Bibliografie .....	288