CUPRINS

Capitolul 2

INEGALITATEA CAUCHY – BUNIAKOVSKY – SCHWARZ

2.1. PRELIMINARII

Pentru orice numere reale $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ avem următoarea inegalitate:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right). \qquad (1)$$

Sau prescurtat, folosind simbolul $\sum$ (sumă), se scrie sub forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 .$$

Se cunosc mai multe demonstrații pentru această interesantă inegalitate, inclusiv prin metoda inducției matematice. Aici vom da o demonstrație ce se bazează pe semnul trinomului de gradul al doilea.

Din inegalitatea evidentă $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i x - b_i\right)^2 \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$ dezvoltând, obținem inegalitatea:

$$x^2\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right) - 2x\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right) + \left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Acest fapt are loc dacă

$$\Delta' = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \le 0$$

De unde rezultă:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right)$$

$\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$

Egalitatea are loc când $a_i x - b_i = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall i = \overline{1,n}.$

adică $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ (adică atunci când a_1 şi b_1 sunt proporționali).

Observație. Inegalitatea rezultă imediat din cunoscuta identitate: $\sum_{1 \le i \le j \le n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$, $1 \le i \le j \le n$ (Identitatea lui Lagrange) abstracție făcând de expresia din membrul stâng care este întotdeauna pozitivă.

Pentru $n = 3$. identitatea lui Lagrange se scrie sub forma:

$$\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)^2 + \left(a_1 b_3 - a_3 b_1\right)^2 + \left(a_2 b_3 - a_3 b_2\right)^2 =$$

$$= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2,$$ de unde rezultă inegalitatea C–B–S:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right).$$

<u>Comentariu</u>

1) Inegalitatea C–B–S se utilizează în exerciții pentru a demonstra noi şi noi inegalități.

2) O inegalitate ce rezultă direct din inegalitatea C–B–S este următoarea:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}, \forall a_i \in \mathbb{R} \text{ şi } b_i \in \mathbb{R}^* \qquad (2)$$

care are o arie largă de aplicare în rezolvarea exercițiilor cu inegalități. Fie utilizând C–B–S sub forma (1) sau (2)avem un număr de inegalități imediate (cazuri particulare).

2.2. APLICAȚII IMEDIATE

<u>Exemple:</u>

1) Pentru $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, obținem:

$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 \le n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$, iar pentru $n = 3$

$\left(a_1 + a_2 + a_3\right)^2 \le 3\left(a_1^2 + a_2^2 + a_n^2\right)$,

2) Pentru $b_i = i$, $i = \overline{1,n}$ obținem:

$\left(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n\right)^2 \le \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$ sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)^2 \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)$$

Pentru $n = 3$ rezultă $\left(a_1+2a_2+3a_3\right)^2 \le 14\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)$.

3) Pentru $b_i = \frac{1}{i}$ obținem:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}a_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\left(a_i^2+a_2^2+...+a_n^2\right).$$

Dar $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \le 1+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{3^2-3}+...+\frac{1}{n^2-n} =$

$$= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{n} < 2$$

Deci: $\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_n}{n} < 2\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)$. Dacă $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 = 1$ (puncte situate pe o hiperbolă cu n dimensiuni şi rază egală cu unitatea avem: $\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_n}{n} < 2$)

4) Pentru $a_i = \alpha_i^2$ şi $b_i = 1$ obținem:

$$n^3\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+...+\alpha_n^4\right) \ge \left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)^4,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_i\in\mathbb{R}$$

Demonstrație

Aplicând C–B–S pentru $a_i = \alpha_i^2$ şi $b_i = 1$ obținem:

$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2\right)^2 \le n\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+...+\alpha_n^4\right)$. Ținând seama de inegalitatea 1) obținem: $n\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+...+\alpha_n^4\right) \ge \frac{1}{n^2}\left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)^4$ sau

$n^3\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+...+\alpha_n^4\right) \ge \left(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n\right)^4$. Pentru $n = 3$ rezultă

$27\left(\alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4\right) \ge \left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)^4$.

5) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție convexă, atunci avem inegalitatea:

$$f^2\left(x_1\right)+f^2\left(x_2\right)+...+f^2\left(x_n\right) \ge nf^2\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

Demonstrație

Aplicăm C–B–S pentru $a_i = f\left(x_i\right),\ x_i \in \mathbb{R},\ b_i = 1$

$$\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\ldots+f\left(x_n\right)\right]^2 \le n\left[f^2\left(x_1\right)+f^2\left(x_2\right)+\ldots+f^2\left(x_n\right)\right]$$

Funcția fiind convexă $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\ldots+f\left(x_n\right) \ge nf\,\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Înlocuind, obținem inegalitatea din enunț.

6) $ab+bc+ac \le a^2+b^2+c^2,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

Demonstrație. Fie: $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$ şi $b_1 = b,\ b_2 = c,\ b_3 = a.$

Înlocuind C–B–S (n = 3) obținem:

$\left(ab+bc+ac\right)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$ echivalent cu $\left|ab+bc+ac\right| \le a^2+b^2+c^2$

Rezultă: $a^2+b^2+c^2 \ge \left|ab+bc+ca\right| \ge ab+bc+ca$

7) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$

Demonstrație. Rezultă din 6) înlocuind a cu $\frac{1}{\sqrt{a}}$, b cu $\frac{1}{\sqrt{b}}$ şi c cu $\frac{1}{\sqrt{c}}$

8) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $a_i > 0$ avem:

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2.$$

Demonstrație

Dacă în inegalitatea (1) notăm: $b_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}}$ şi $a_i = \sqrt{a_i}$ obținem:

$$\left(\sqrt{a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\sqrt{a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\ldots+\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \le \left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

echivalent cu $\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$

Pentru n = 3 obținem inegalitatea cunoscută

$$\left(a_1+a_2+a_3\right)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) \ge 9$$

9) Dacă $a_i \in (0,+\infty)$ şi $a_1 a_2 ... a_n = 1$, atunci avem:

$$\frac{a_1^2}{1\cdot 2} + \frac{a_2^2}{2\cdot 5} + ... + \frac{a_n^2}{n(3n-1)} \geq \frac{1}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Soluție

În inegalitatea sub forma (2) înlocuim:

$b_i = i(3i-1), \forall i = \overline{i,n}$ şi obținem:

$$\frac{a_1^2}{1\cdot 2} + \frac{a_2^2}{2\cdot 5} + ... + \frac{a_n^2}{n(3n-1)} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{1\cdot 2 + 2\cdot 5 + ... + n(3n-1)}$$

Dar se arată cu uşurință că $S = 1\cdot 2 + 2\cdot 5 + ... + n(3n-1) = n^2(n+1)$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\ (M_A \geq M_G)$. Înlocuind obținem:

$$\frac{a_1^2}{1\cdot 2} + \frac{a_2^2}{2\cdot 5} + ... + \frac{a_n^2}{n(3n-1)} \geq \frac{n^2}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

10) Dacă $x_i \in (0,+\infty)$, $i = \overline{1,n}$ atunci avem inegalitatea:

$$\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(1 + \frac{x_2}{x_3}\right)^2 + ... + \left(1 + \frac{x_n}{x_1}\right)^2 \geq 4n$$

Soluție

Aplicând inegalitatea (1) de la exemple pentru $a_i = 1 + \frac{x_i}{x_{i+1}}$ şi $b_i = 1$ vom avea:

$$n\left[\left(1 + \frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(1 + \frac{x_2}{x_3}\right)^2 + ... + \left(1 + \frac{x_n}{x_1}\right)^2\right] \geq \left(1 + \frac{x_1}{x_2} + 1 + \frac{x_2}{x_3} + ... + 1 + \frac{x_n}{x_1}\right)^2 =$$

$$= \left(n + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1}\right)^2 = n^2 + 2n\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1}\right) + \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + ... + \frac{x_n}{x_1}\right)^2 \geq$$

$\geq n^2 + 2n^2 + n^2 = 4n^2$. De unde va rezulta inegalitatea din enunț

11) Dacă $a_i > 0$ şi $a_1 a_2 ... a_{2n+1} = 1$. Să se arate că avem:

$$(n+1)a_1^2 + (n+2)a_2^2 + ... + (3n+1)a_{2n+1}^2 > \frac{(2n+1)^2}{2}$$

Soluție. În inegalitatea C–B–S de forma (2) înlocuim:

$b_1 = \frac{1}{n+1}, \ b_2 = \frac{1}{n+2}, \ ...., b_{2n+1} = \frac{1}{3n+1}$ şi obținem:

$$\frac{a_1^2}{\frac{1}{n+1}} + \frac{a_2^2}{\frac{1}{n+2}} + ... + \frac{a_n^2}{\frac{1}{n+(2n+1)}} \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + ... + a_{2n+1}\right)^2}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+(2n+1)}}$$

Dar se arată că $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n+1} < 2$ şi din $M_A \geq M_G$ rezultă $\left(a_1 + a_2 + ... + a_{2n+1}\right)^2 \geq (2n+1)^2 \sqrt[2n+1]{a_1 a_2 ... a_{2n+1}}$

de unde $(n+1)a_1^2 + (n+2)a_2^2 + ... + (2n+1)a_{2n+1}^2 \geq \frac{(2n+1)^2}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

12) Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ n numere reale strict pozitive, astfel încât $x_1 \cdot x_2 ... x_n \geq 1$. Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 \leq x_1^4 + x_2^4 + ... + x_n^4$

Soluție

Din inegalitatea mediilor avem: $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$ şi $\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} \geq$

$\geq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq x_1 + x_2 + ... + x_n$

Utilizând inegalitatea C–B–S avem:

$\left(x_1 \cdot x_2^2 + x_2 x_2^2 + ... + x_n x_n^2\right)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)\left(x_1^4 + x_2^4 + ... + x_n^4\right) \leq$

$\leq \left(x_1^4 + x_2^4 ... + x_n^4\right)^2$ de unde rezultă inegalitatea cerută

13) Dacă $a_i \in (0, +\infty), \ i = \overline{1,n}$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$, atunci:

$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + ... + \frac{a_n^2}{a_n + a_1} \geq \frac{1}{2}$ (Olimpiada Rusă)

Soluție. Rezultă aplicând direct inegalitatea C–B–S sub forma (2)

2.3. EXERCIȚII PROPUSE

1) $a^2 x + b^2 y + c^2 z \geq 3xyz, \ \forall a, b, c, x, y, z \in [0, +\infty)$ astfel încât $a + b + c = x + y + z$

2) $ax^2+by^2+cz^2 \geq 3abc,\ \forall a,b,c,x,y,z \in [0,+\infty)$ astfel încât $a+b+c=x+y+z$

3) $ax(a+x)+by(b+y)+cz(c+z) \geq 3(abc+xyz)$,
$\forall a,b,c,x,y,z \in [0,+\infty)$ astfel încât $a+b+c=x+y+z$

4) $xy^3+yz^3+zx^3 \geq xyz(x+y+z), \forall x,y,z \in (0,+\infty)$

5) $xyz(x+y+z) \leq \min\left(xy^3+yz^3+zx^3+x^3y+y^3z+z^3x\right)\forall x,y,z \in (0,+\infty)$

6) $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z),\ \forall x,y,z \in (0,+\infty)$

7) $\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right) \leq \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^4+b^4+c^4\right)$,
$\forall a,b,c \geq 0$

8) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

9) $ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$

10) $\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $abc=1$

11) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}, \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$

12) $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3abc(a+b+c)} \geq abc\sqrt{3},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $a+b+c \geq abc$

13) $1<\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $a+b+c=1$

14) $3\sqrt{abc} \leq a+b+c \leq 1, \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3\sqrt{abc}$

15) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq \sqrt{3},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=1$

16) $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=1$

17) $\frac{c}{ab}+\frac{4a}{bc}+\frac{9b}{ca} \geq \frac{2}{b}+\frac{6}{c}+\frac{3}{a},\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}^*$

18) $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2 \geq ab+bc+ca,\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

19) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c),\ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

20) $a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geq \frac{2}{3}(ab+bc+ca)^2$

21) $a+b+c+d+e+f=10$

$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6$. Să se determine valoarea maximă a lui *f*. (Olimpiada Balcanică)

22) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

23) $\left(a+\frac{b}{x}\right)^4+\left(a+\frac{b}{y}\right)^4+\left(a+\frac{b}{z}\right)^4\geq 3(a+3b)^4$, $\forall a,b>0,\ x,y,z>0$ astfel încât $x+y+z=1$

(I.V. Maftei)

24) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\left(1+\frac{b+c}{\sqrt{bc}}\right)^2$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

(Marius Drăgan)

25) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2,\ \forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^*$

26) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq$

$$\geq\max\left\{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}+\sqrt{\frac{a_2}{a_3}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{a_1}},\left(1+\sqrt{\frac{a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{a_2}}\right)^2,\right.$$

$$\left.\left(2+\sqrt{\frac{a_3}{a_4}}+\sqrt{\frac{a_4}{a_5}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{a_3}}\right)^2,\ldots\left(n-2+\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_n}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}\right)^2\right\},$$

$\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^*,\ n\geq 2$

(Marius Drăgan)

27) $(p_1a_1+p_2a_2+\ldots+p_na_n)\left(\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}+\ldots+\frac{p_n}{a_n}\right)\geq n^2,\ \forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+^*$

$p_1,p_2,\ldots,p_n\geq 0$ astfel încât $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$

28) $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 4\left(\frac{d+c}{\sqrt{dc}}+\frac{b+d}{\sqrt{bd}}\right), \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$

(Marius Drăgan)

29) $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 4(ac+bd+2),\ \forall a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $abcd=1$

(Marius Drăgan)

30) $\dfrac{a_1^2}{b_1}+\dfrac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{b_n}\geq\dfrac{\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$,

$\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}_+,\ \forall b_1,b_2,\ldots,b_n\in\mathbb{R}_+^*$

31) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}\geq\dfrac{36}{a+b+c},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

32) $\dfrac{2}{b+c}+\dfrac{2}{c+a}+\dfrac{2}{a+b}\geq\dfrac{9}{a+b+c},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

33) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 9,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*,$ astfel încât $a+b+c=1$

34) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 9,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*,\ a+b+c\leq 1$

35) $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\geq\dfrac{a+b+c}{2},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

36) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{9}{4},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $ab+bc+ca=\dfrac{2}{9}\left(a+b+c\right)^2$

37) $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{2},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

38) $\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{b}{c+a-b}+\dfrac{c}{a+b-c}\geq 3,$ unde a,b,c reprezintă laturile unui triunghi (M. şi G. Stoica)

39) $\dfrac{a^2}{b+c-a}+\dfrac{b^2}{c+a-b}+\dfrac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c$ unde a,b,c reprezintă laturile unui triunghi

40) $\dfrac{a^2}{a+2b+3c}+\dfrac{b^2}{b+2c+3a}+\dfrac{c^2}{c+2a+b}\geq\dfrac{a+b+c}{6},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

41) $\dfrac{a}{a+2b+3c}+\dfrac{b}{b+2c+3a}+\dfrac{c}{c+2a+b}\geq\dfrac{3}{4},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

(Gh. Eckstein)

42) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geq\dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{2\left(a^2+b^2+c^2\right)},\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

43) $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}\geq\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right),\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

44) $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $ab+bc+ca=1$

45) $\frac{a^2}{a+2b+3c}+\frac{b^2}{3a+b+2c}+\frac{c^2}{2a+3b+c}\geq 1$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $a+b+c=6$

46) $\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\geq\frac{3}{5}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$, astfel încât $a+b+c=1$

47) $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{3}{4}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $2abc+ab+bc+ca=1$

48) $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\geq 1$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $abc=1$

49) $\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geq 1$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

50) $\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ac}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\leq 1$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$

51) $\frac{a^2}{(b+c)(2a+b+c)}+\frac{b^2}{(c+a)(2b+c+a)}+\frac{c^2}{(a+b)(2c+a+b)}\geq\frac{3}{8}$

(Vasile Mircea Popa)

52) $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(b+a)}\geq\frac{3}{2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $abc=1$

(O.I.M. 1992)

53) $\frac{a}{a^2+1}\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\frac{b}{b^2+1}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^2+\frac{c}{c^2+1}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2\geq\frac{a+b+c}{2}$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$, astfel încât $a+b+c\geq a^3+b^3+c^3$

(Gabriel Dospinescu)

54) $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{(a+b+c+d)^2}{3(a^2+b^2+c^2+d^2)}$

55) $\frac{a}{3b+c}+\frac{b}{3c+d}+\frac{c}{3d+a}+\frac{d}{3a+b}\geq 1$, $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}_+^*$

(Dorinel Anca)