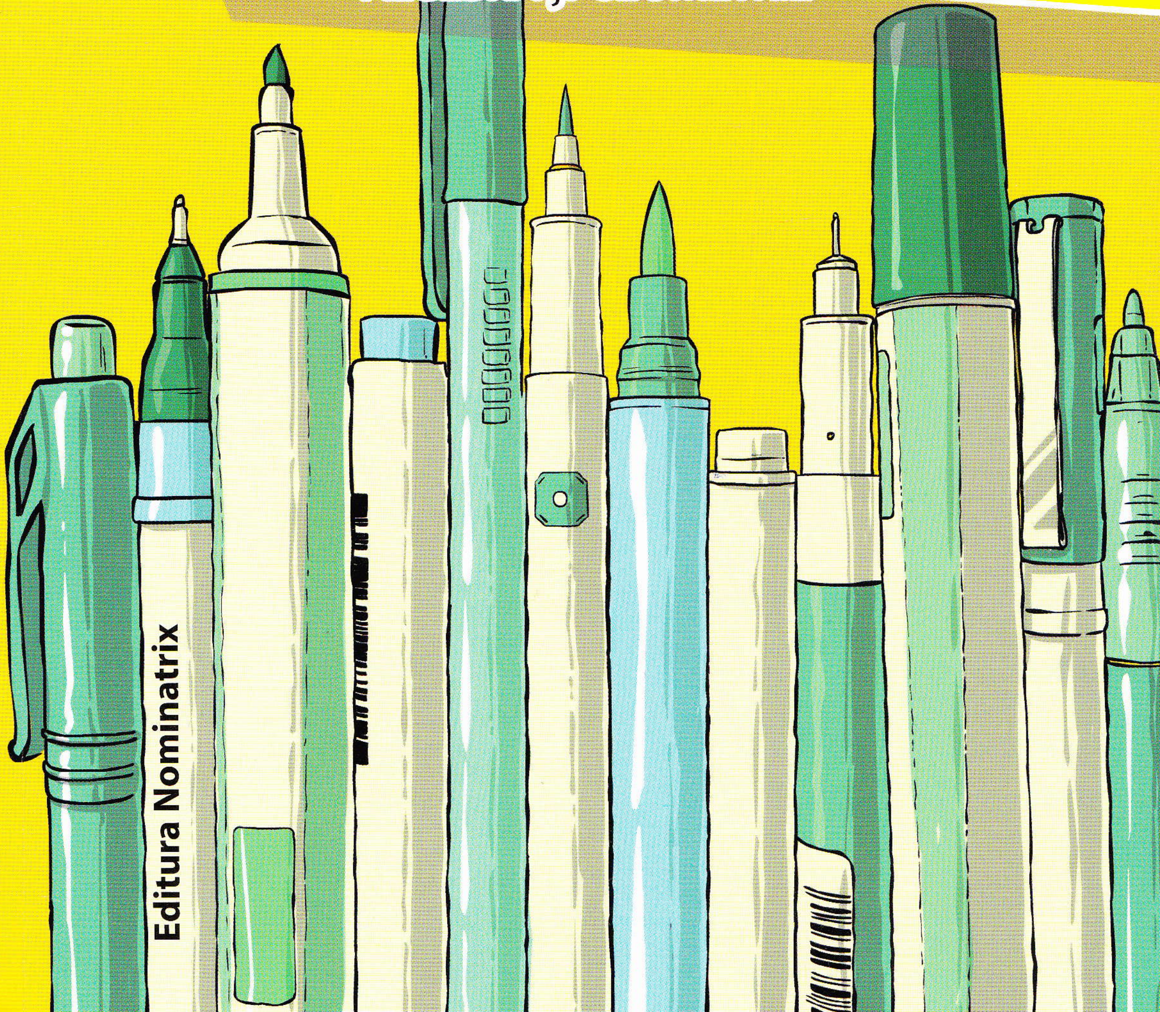
Ora de matematică

clasa a IX-a

ALGEBRĂ și GEOMETRIE



Editura Nominatrix

Petre Năchilă

Ora de matematică
Algebră şi geometrie

Clasa a IX-a

Editura NOMINATRIX

Cuprins

ALGEBRĂ

Capitolul 1
ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ. MULȚIMI DE NUMERE

1.1. Mulțimi

Mulțimea este o colecție de obiecte distincte. Obiectele mulțimii se numesc elemente. Mulțimile se notează cu literele mari ale alfabetului. O mulțime poate fi dată prin enumerarea elementelor sale sau specificând anumite proprietăți pe care le au doar aceste elemente. Dacă a aparține A, notăm $a \in A$. În caz contrar $a \notin A$.

Definiții. 1. incluziunea: $A \subset B$ dacă pentru orice element $a \in A$ avem $a \in B$;

2. egalitatea: $A = B$ dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Operații cu mulțimi

1. reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$
2. intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$
3. diferența: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$
4. complementara: dacă $A \subset E$, $C_E A = E - A$
5. produs cartezian: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

Definiții. 3. Mulțimea părților unei mulțimi nevide A este mulțimea:

$$P(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

4. Dacă A este o mulțime finită, numărul elementelor lui A se numește *cardinalul* mulțimii A (notat cu card A).

Teorema 1. Dacă card $A = n \in \mathrm{N}$, atunci card $\mathcal{P}(A) = 2^n$.

Teorema 2. Dacă card $A = m$, card $B = n$, $m, n \in \mathrm{N}$, atunci card $(A \times B) = mn$.

Teorema 3. Relația de incluziune are proprietățile:

a) reflexivă: $A \subset A$;

b) antisimetrică: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$;

c) tranzitivă: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Teorema 4. Relația de egalitate are proprietățile:

a) reflexivitate: $A = A$;

b) simetrie: $A = B \Rightarrow B = A$;

c) tranzitivă: $A = B, B = C \Rightarrow A = C$.

PROBLEME PROPUSE

1. Operațiile cu mulțimi au următoarele proprietăți:

a) comutativitatea: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

b) asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$:

c) independență: $A \cap A = A$; $A \cap A = A$;
$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$.

d) distributivitatea reuniunii (intersecției) față de intersecție (reuniune):
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

e) reuniunea (intersecția) are proprietatea de absorbție față de intersecție (reuniune):
$A \cap (A \cup B) = A$;
$A \cup (A \cap B) = A$.

f) pentru orice mulțime $B \subset A$ avem $A \cup B = A$; $A \cap B = B$.

g) Legile lui Morgan: pentru orice $A \subset E$, $B \subset E$ avem $C \in (A \cup B) = C_E A \cap C_E B$; $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$.

h) Dacă $A \subset E$, avem $C_E(C_E A) = A$; $C_E E = \varnothing$, $C_E \varnothing = E$.

i) Produsul cartezian este distributiv față de intersecție, reuniune, diferență:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$; $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

j) card $(A \cup B)$ = card A + card B – card $(A \cap B)$.

2. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Determinați două mulțimi B și C cu proprietățile $B \cup C = A$, $B \cap C = \varnothing$, suma elementelor lui B este egală cu suma elementelor lui C în cazurile:

a) card $B = 6$; card $C = 14$; b) card $B = 7$, card $C = 13$.

3. Determinați mulțimile A formate din trei numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A, x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

4. Determinați mulțimile A formate din 4 numere naturale știind că pentru orice $x, y \in A, x \geq y$, avem $1 + x - y \in A$.

5. Fie mulțimea $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Demonstrați că există mulțimile B_n, C_n, $D_n \subset A_n$, disjuncte două câte două astfel încât $s(B_n) = s(C_n) = s(D_n)$, unde $s(M)$ este suma elementelor lui M.

6. Fie $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, unde $n \in \{5, 6, 8, 9\}$. Determinați cel mai mic element al mulțimii A_n astfel încât $S(A_n) = 36$.

7. Determinați cel mai mic număr de numere care trebuie scoase din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ astfel încât mulțimea rămasă să poată fi împărțită în două submulțimi disjuncte B și C în care produsele elementelor lor să fie numere egale.

8. Dați exemplu de trei mulțimi A, B și C cu proprietățile $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$, card $B = 3$, $p(B) = p(C)$, unde $p(M)$ înseamnă produsul elementelor lui M.

9. Rezolvați problema **8** în cazul $A = \{1, 2, 3, \ldots, 35\}$.

10. Așezați pe un cerc toate numerele de la 1 la 16 astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie număr prim.

11. Determinați mulțimile A, B, C dacă:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A - (A \cap B) = \{6\}$; c) $B - (B \cap A) = \{1, 3\}$.

12. Determinați mulțimile A, B, C dacă:

a) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $A \cap B = \varnothing$;
c) $C \subset B$; d) $A - C = \{1, 3, 7\}$; e) $B - C = \{5, 9\}$.

13. Rezolvați următoarele ecuații:

a) $\{1, 2\} \cup x = \{1, 2, 3\}$; b) $(A - x) \cup (x - A) = \{1, 2, 3\}$, unde $A = \{1, 2\}$;
c) $(A - x) \cup (x - A) = \{1, 4, 5\}$, unde $A = \{1, 2, 3\}$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A = \{2a + 2\}$, $B = \{b, 2a + 1\}$. În ce condiții avem:

a) card $(A \cup B) = 2$; b) card $(A \cup B) = 3$; c) card $(A \cup B) = 4$.

15. Fie mulțimea $A \subset \mathbb{N}$, având proprietățile:

i) $2 \in A$, $3 \in A$; ii) $x \in A \Rightarrow 3x - 1 \in A$; iii) $x + 1 \in A \Rightarrow x \in A$

a) Determinați încă 5 elemente din A.
b) Determinați A.

16. Determinați card $(A \cap B)$ dacă:

card $(A \cup B) = 201$; card $(A - B) = 100$ și card $(B - A) = 96$.

17. Determinați card A în cazurile:

a) $A = \left\{ a \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \frac{b}{a} = n^2, n \in \mathbb{N} \right\}$, unde $b = (2^2 - 1)(3^2 - 1)\ldots(99^2 - 1)$;

b) $A = \left\{ \overline{ab} \,\middle|\, \overline{0,aa(b)} + \overline{0,bb(a)} = \left(0,(6)\right)^2 \right\}$;

c) $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 13$ divide pe $2^n + 3^n\}$;

d) $A = B \cap \mathbb{N}$, unde $B = \left\{ \frac{3n+1}{4}, \frac{3n+2}{4}, \frac{n}{8}, \frac{3n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

18. Fie mulțimile $A_n = \left\{ \frac{n-1}{n} + \frac{kn}{n+1} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că intersecția mulțimilor A_n este $\varnothing$.

19. Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $\frac{n}{n+1} < x < \frac{2n+1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

1.2. Mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Rezolvarea unor ecuații de forma $a + x = b$, $a > b$, a dus la considerarea mulțimii $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Rezolvarea unor ecuații de forma $bx = a$, $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $(a, b) \neq 1$, a condus la considerarea mulțimii $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$.

Definiția 1. Fracțiile $\frac{a}{b}, \frac{a}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, se numesc echivalente dacă $ad = bc$. Mulțimea tuturor fracțiilor lor echivalente cu o fracție dată, se numește număr rațional. Avem $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 1. Adunarea și înmulțirea pe mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ au proprietățile:

1) comutativitate: $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$;

2) asociativitate: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$;

3) 0 este element neutru pentru adunare: $a + 0 = 0 + a = a$;

4) 1 este element neutru pentru înmulțire: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

5) orice element $a \in \mathbb{Q}$ sau $a \in \mathbb{Z}$ are un opus (notat ca $-a$) : $a + (-a) = 0$;

6) orice element $a \in \mathbb{Q}^*$ are un invers (notat cu a^{-1} sau $\frac{1}{a}$) : $a \cdot a^{-1} = 1$;

7) înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = ab + ac$.

Observații:

a) În $\mathbb{N}$ doar 0 are opus (pe 0).

b) În $\mathbb{N}$ un singur element este inversabil (1). Inversul lui 1 este 1.

c) În $\mathbb{Z}$, elementele inversabile sunt 1 și -1. Avem $(-1)^{-1} = 1$.

Definiția 2. Spunem că $a \geq b$ dacă există $c \geq 0$ astfel încât $a = b + c$; spunem că $a > b$ dacă există $c > 0$ astfel încât $a = b + c$.

8) Trichotomie. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Q}$ avem $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$;

9) Axioma lui Arhimede. Pentru orice două numere naturale $a, b, a > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \cdot n > b$ (se ia $n = \left[\frac{b}{a}\right] + 1$)

- Orice fracție ordinară se transformă în fracție zecimală aplicând algoritmul de împărțire a numerelor naturale;
- fracție zecimală periodică simplă ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots a_n$ cifre)

$$a_0,(a_1, a_2 \ldots a_n) = a_0 + \frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{n \text{ cifre}}};$$