PETRE SIMION **VICTOR NICOLAE**

MATEMATICĂ

clasa a XII-a

BREVIAR TEORETIC. EXERCIȚII ŞI PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE

■ **filiera tehnologică**
toate calificările profesionale

Consultant:
Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ

NICULESCU

CUPRINS

Algebră

Analiză matematică

Răspunsuri

Capitolul I
GRUPURI

1. Legi de compoziţie. Parte stabilă

IMPORTANT!

Definiţie. Dacă M este o mulţime nevidă, atunci o funcţie $\varphi: M \times M \to M$ se numeşte *lege de compoziţie* (sau operaţie algebrică internă sau operaţie liniară) pe mulţimea M, $(x, y) \to \varphi(x, y)$.

Pentru simplificare, operaţia algebrică se notează cu $*$, $\circ$, $\perp$, $+$, Δ etc.

Exemplu: $*: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x * y = \dfrac{x+y}{1-xy}$.

Dacă mulţimea M este finită, atunci legea de compoziţie poate fi exprimată printr-un tabel cu n linii şi n coloane, unde $n = \text{card } M$.

Exemplu: $M = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, unde ε este rădăcină cubică a unităţii, iar legea de compoziţie este înmulţirea „$\cdot$ ”.

$\cdot$	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

Observaţie. Acest tabel se numeşte *tabla Cayley* sau *tabla operaţiei*.

1. Adunarea şi înmulţirea modulo *n*

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a \in \mathbb{Z}$, atunci numărul r din teorema împărţirii cu rest $a = n \cdot c + r$, $0 \le r < n$, se numeşte *restul modulo n* al numărului a şi se notează cu $r = a \bmod n$. Notăm cu $R_n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, mulţimea resturilor modulo n şi introducem legile de compoziţie: $\oplus: \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$, $x \oplus y = (x+y) \bmod n$ şi $\odot: \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$, $x \odot y = (x \cdot y) \bmod n$, numite adunarea modulo n, respectiv înmulţirea modulo n.

Exemplu: $R_3 = \{0, 1, 2\}$, este mulţimea resturilor modulo 3. Tabelele operaţiilor de adunare modulo 3 şi de înmulţire modulo 3 sunt următoarele:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2. Adunarea şi înmulţirea claselor de resturi modulo *n*.

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$ şi $r = a \bmod n$, notăm cu $\hat{a} = \{nk + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ şi o numim clasă de resturi modulo *n*. Se poate arăta că $\hat{a} = \hat{r}$. Atunci mulţimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ se numeşte mulţimea claselor de resturi modulo *n*.

Se definesc legile de compoziţie

$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ şi $\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{x \cdot y}$

adunarea, respectiv înmulţirea claselor de resturi modulo *n*. Se poate demonstra că operaţiile definite anterior sunt independente de reprezentanţii aleşi *x* şi *y* ai claselor.

Exemplu: Tabla adunării şi înmulţirii în mulţimea claselor de resturi modulo 4.

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\cdot$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$
$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{3}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Definiţie. Fie *M* o mulţime pe care este dată o lege de compoziţie φ:

$\varphi : M \times M \to M$; $(x, y) \to \varphi(x, y)$

O submulţime *H* a lui *M* cu proprietatea $(\forall)\ x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$ se numeşte parte stabilă a lui *M* în raport cu legea de compoziţie.

Observaţie: Notăm cu $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mulţimea numerelor întregi pare şi $2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mulţimea numerelor întregi impare. Avem $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

Modele pentru rezolvarea problemelor şi redactarea soluţiilor

1. Arătaţi că mulţimea $2\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire.

Soluţie:

Fie $x, y \in 2\mathbb{Z}$, $x = 2k_1$, $y = 2k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$; atunci $x + y = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) \in 2\mathbb{Z}$.

$x \cdot y = 2k_1 \cdot 2k_2 = 4k_1 \cdot k_2 \in 2\mathbb{Z}$.

2. Arătaţi că $2\mathbb{Z} + 1$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea numerelor întregi.

Soluţie:

Fie $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1$, $x = 2k_1 + 1$, $y = 2k_2 + 1$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Avem $x + y = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 1) \notin 2\mathbb{Z} + 1$.

3. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim legea $*$ astfel: $x * y = xy - 2x - 2y + 6$. Arătaţi că:

a) $H_1 = (2, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

b) $H_2 = [1, 3]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

Soluție:

a) Fie $x, y \in H_1$ şi arătăm că $x * y \in H_1$; $x > 2, y > 2$ sau $x - 2 > 0, y - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(y-2) > 0 \Rightarrow (x-2)(y-2) + 2 > 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 + 2 > 2 \Rightarrow x * y > 2$ deci $x * y \in H_1$.

b) Fie $x, y \in H_2$ şi arătăm că $x * y \in H_2$; $1 < x < 3$; $1 < y < 3 \Leftrightarrow |x-2| < 1$; $|y-2| < 1$ şi arătăm că $|x * y - 2| < 1$.

$$\begin{array}{l} |x-2| < 1 \\ |y-2| < 1 \\ \hline |xy-2x-2y+4| < 1 \Leftrightarrow |xy-2x-2y+6-2| < 1 \Leftrightarrow |x*y-2| < 1 \Rightarrow x*y \in H_2. \end{array}$$

4. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x * y = xy + x + y$.

Demonstrați că $H = (-1, \infty) \subset \mathbb{R}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea $*$.

Soluție:

Vom arăta că dacă $x, y \in H$, atunci $x * y \in H$. Putem scrie

$xy + x + y = xy + x + y + 1 - 1 = (x+1)(y+1) - 1$.

Din $x, y \in (-1, \infty) \Rightarrow x > -1, y > -1 \Rightarrow x + 1 > 0, y + 1 > 0 \Rightarrow (x+1)(y+1) > 0 \Rightarrow (x+1)(y+1) - 1 > -1 \Rightarrow x * y > -1$, de unde $x * y \in (-1, \infty) = H$.

5. Fie $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \ / \ A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}; 4x^2 - 3y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Să se demonstreze că H este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluție:

Fie $A_1, A_2 \in H$ şi vom demonstra că $A_1 \cdot A_2 \in H$.

Fie $A_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix}$: $4x_1^2 - 3y_1^2 = 1, x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$ şi

$A_2 = \begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix}$: $4x_2^2 - 3y_2^2 = 1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$.

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 3y_1y_2 & 6x_1y_2 + 6x_2y_1 \\ 2x_2y_1 + 2x_1y_2 & 3y_1y_2 + 4x_1x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2) & 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1) \\ 2x_1y_2 + 2x_2y_1 & 2(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ b & 2a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{Q}.$$

Se mai verifică și condiția $4a^2 - 3b^2 = 1$.

$$4a^2 - 3b^2 = 4(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2)^2 - 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1)^2 =$$

$$= 4x_1^2(4x_2^2 - 3y_2^2) - 3y_1^2(4x_2^2 - 3y_2^2) = (4x_2^2 - 3y_2^2)(4x_1^2 - 3y_1^2) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Deci H este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

6. Fie $G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ şi funcţiile $f_k : G \to G$, $k \in \{1, 2, 3\}$ definite astfel:

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}$, $f_3(x) = \frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}$. Arătaţi că $H = \{f_1, f_2, f_3\}$ este parte stabilă a mulţimii $F(G) = \{f : G \to \mathbb{R}\}$ în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

Soluţie:

Fiind o mulţime finită vom realiza tabla Cayley şi vom vedea că oricare ar fi f_i, $f_j \in H$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $f_i \circ f_j \in H$.

Deoarece f_1 este funcţie identică rezultă

$(f_1 \circ f_i)(x) = f_1(f_i(x)) = f_i(x)$ şi că $(f_i \circ f_1)(x) = f_i(f_1(x)) = f_i(x)$, $(\forall)\ i \in \{1, 2, 3\}$.

$$(f_2 \circ f_2)(x) = f_2(f_2(x)) = \frac{f_2(x)+\sqrt{3}}{1-f_2(x)\sqrt{3}} = \frac{x+\sqrt{3}+\sqrt{3}-3x}{1-x\sqrt{3}-\sqrt{3}x-3} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}} = f_3(x).$$

$$(f_2 \circ f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = \frac{f_3(x)+\sqrt{3}}{1-f_3(x)\sqrt{3}} = \frac{x-\sqrt{3}+\sqrt{3}+3x}{1+x\sqrt{3}-x\sqrt{3}+3} = \frac{4x}{4} = x = f_1(x).$$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_3(f_2(x)) = \frac{f_2(x)-\sqrt{3}}{1+f_2(x)\sqrt{3}} = \frac{x+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3x}{1-x\sqrt{3}+\sqrt{3}x+3} = \frac{4x}{4} = x = f_1(x).$$

Tabela compunerii este:

$\circ$	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

Exerciţii şi probleme pentru fixarea cunoştinţelor

1. Fie $H = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$. Pe H se introduce operaţia $x * y = \min(x, y)$ (minimul dintre x şi y). Arătaţi că H este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu $*$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim $x * y = (x-1)(y-1) + 1$. Arătaţi că:

a) $H_1 = [1, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

b) $H_2 = [1, 2]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu $*$.

3. Pe $\mathbb{R}$ definim operaţia $x * y = -xy - 5x - 5y - 30$. Arătaţi că $H = (-\infty, -5)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operaţia $*$.

4. Completaţi tabla operaţiei adunării modulo 5 şi tabla înmulţirii modulo 5.

5. Completaţi tabla operaţiei adunării şi tabla înmulţirii modulo 7.

6. Fie $M = [3, \infty)$ şi operaţia $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Să se demonstreze că „*” este o lege de compoziţie internă.

7. Fie mulţimea $H = \left\{\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{N}, a^2 - 2b^2 = 1\right\}$.

a) Să se stabilească dacă $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ aparţin lui H.

b) Să se studieze dacă H este parte stabilă faţă de înmulţirea matricelor.

8. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = 3x + 4y - 7$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi $(2 \circ 3) \circ 1$.

b) Rezolvaţi ecuaţiile $x \circ 2 = 7$ şi $(2x + 1) \circ x = 18$.

c) Rezolvaţi ecuaţia $(x^2 + 1) \circ (x - 1) = -1$.

d) Rezolvaţi sistemul $\begin{cases} x \circ y = 7 \\ (2x) \circ (3y) = 29 \end{cases}$.

9. Fie $F = \{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f_a(x) = 2^a x + 1 - 2^a,\ a \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că F este parte stabilă în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

10. Fie mulţimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 4x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix} / \, x \in \mathbb{R} \right\}$. Arătaţi că mulţimea G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

Exerciţii şi probleme pentru aprofundarea cunoştinţelor

1. Arătaţi că mulţimea $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 3y \\ \dfrac{7y}{3} & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \text{ şi } x^2 - 7y^2 = 1 \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x \top y = xy + \dfrac{x+y}{n} - \dfrac{n-1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Arătaţi că:

a) $x \top y = \left(x + \dfrac{1}{n}\right)\left(y + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$;

b) $x \top \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

c) $H = \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operaţia „$\top$”.

3. Pe mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ se defineşte legea de compoziţie $x \vartriangle y = x + y - \frac{xy}{2}$. Arătaţi că $\mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu operaţia „$\vartriangle$”.

4. Pe mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ se definesc operaţiile: $x \circ y = x + y - a$ şi $x * y = xy - a(x+y) + a(a+1)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$. Rezolvaţi:

a) ecuaţia $x \circ x = x * x$, $x \in \mathbb{Z}$;

b) sistemul $\begin{cases} x \circ (y+2) = a \\ (x-y) * 1 = a \end{cases}$.

5. Arătaţi că $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 2x(x+1) \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

6. Pe mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se definesc operaţiile: $x \circ y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Arătaţi că $[2, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ în raport cu $\circ$.

7. Fie $G = (2, +\infty)$ şi legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$, $\forall x, y \in G$.

a) Calculaţi $x \circ x \circ x \circ x$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 18$.

8. Determinaţi pentru ce valori este parametrului $m \in \mathbb{R}$, intervalul $(2, +\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie: $x * y = xy - 2x - 2y + m$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

9. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Arătaţi că M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor.

b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A(a) \cdot A(x) = A(x)$.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $A(x) \cdot A(1) = A(x + 2025)$.

d) Calculaţi $\left(A(x)\right)^3, x \in \mathbb{R}$.

10. Pe $\mathbb{Z}$ se definesc operațiile algebrice

$x * y = x + y - 3$ şi $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{Z}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $x \circ x = x * x$.

b) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ a = 3$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$.

c) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x*(y+1) = 4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$.

(Bacalaureat 2009)

11. Fie $M = \mathbb{R}^* \setminus \{\pm 1\}$ şi funcțiile $f_i : M \to M$, $i = 1, 2, 3, 4$, unde

$$f_1(x) = x;\ f_2(x) = \frac{x-1}{x+1};\ f_3(x) = -\frac{1}{x};\ f_4(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Considerăm mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ şi operația de compunere a funcțiilor. Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu compunerea funcțiilor.

12. Fie $M = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ şi operația $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Să se demonstreze că M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu operația $*$.

13. Pe mulțimea $M = (2, \infty)$ se consideră operația

$$x \circ y = \frac{xy-2}{x+y-3},\ (\forall)\, x, y \in M.$$

a) Să se arate că M este parte stabilă în raport cu „$\circ$”.

b) Verificați egalitatea $(3 \circ 4) \circ 5 = 3 \circ (4 \circ 5)$.

14. Fie mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}\,] = \{a + b\sqrt{3} \ /\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $\mathbb{Z}[\sqrt{3}\,]$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulțirea numerelor reale.

15. Fie $M = \{x + y\sqrt{2} \ /\ x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 2y^2 = 1\}$. Să se arate că M este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.