



Respect pentru oameni și cărți

**GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER**

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR  
DE MATEMATICĂ  
ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ  
PENTRU GIMNAZIU**

**EDITURA HYPERION**

<b>1</b>	<b>Mulțimi . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1	Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență . . . . .	3
1.2	Relația între două mulțimi. Submulțimi . . . . .	4
1.3	Operații cu submulțimi . . . . .	5
1.4	Aplicații . . . . .	6
<b>2.</b>	<b>Mulțimea numerelor naturale . . . . .</b>	<b>8</b>
2.1	Scrierea și citirea numerelor naturale în sistemul de numerație zecimal . . . . .	8
2.2	Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximarea și rotunjirea numerelor naturale . . . . .	10
2.3	Adunarea numerelor naturale . . . . .	12
2.4	Scăderea numerelor naturale . . . . .	13
2.5	Înmulțirea numerelor naturale. Factor comun. Ordinea efectuării operațiilor. Utilizarea parantezelor . . . . .	14
2.6	Împărțirea cu rest a numerelor naturale . . . . .	16
2.7	Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural. Compararea puterilor care au aceeași bază sau același exponent. Ordinea efectuării operațiilor . . . . .	17
2.8	Divizor. Multiplu . . . . .	21
2.9	Criterii de divizibilitate cu 10, 2, 5, 3 și 9 . . . . .	22
2.10	Numere prime. Numere compuse . . . . .	24
2.11	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime . . . . .	25
2.12	Divizori comuni a două sau mai multe numere naturale. C.m.m.d.c. Numere prime între	

Respect pentru oameni și cărți	
ele .....	26
2.13 Multiplii comuni a două sau mai multe numere naturale. C.m.m.m.c. Relația dintre c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ....	27
2.14 Aplicații .....	28
<b>3 Multimea numerelor întregi .....</b>	<b>31</b>
3.1 Număr întreg, opusul unui număr întreg, reprezentarea pe axă a numerelor întregi, valoarea absolută (modulul) .....	31
3.2 Compararea și ordonarea numerelor întregi ..	32
3.3 Adunarea numerelor întregi .....	33
3.4 Scăderea numerelor întregi .....	34
3.5 Înmulțirea numerelor întregi .....	34
3.6 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului .....	35
3.7 Ridicarea la putere a numerelor întregi .....	36
3.8 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor .....	37
3.9 Divizorii unui număr întreg .....	37
3.10 Aplicații .....	39
<b>4 Multimea numerelor raționale .....</b>	<b>40</b>
4.1 Numere raționale pozitive .....	40
4.2 Multimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ ; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor; opusul unui număr rațional; valoarea absolută (modulul) unui număr rațional .....	48
4.3 Compararea și ordonarea numerelor raționale ..	49
4.4 Adunarea și scăderea numerelor raționale .....	50
4.5 Înmulțirea numerelor raționale .....	52
4.6 Împărțirea numerelor raționale .....	52
4.7 Puterea unui număr rațional cu exponent întreg. Reguli de calcul cu puteri .....	52
4.8 Aplicații .....	54

5	Numere reale .....	54
	5.1 Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect .....	54
	5.2 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv pătrat perfect .....	54
	5.3 Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv care nu este pătrat perfect .....	55
	5.4 Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale .....	56
	5.5 Operații cu numere reale de forma $a\sqrt{b}$ , $b \in \mathbb{Q}$ , $a > 0$ .....	56
	5.6 Raționalizarea numitorului unei fracții, având numitorul irațional .....	57
6	Rapoarte și proporții .....	58
	6.1 Rapoarte și procente .....	58
	6.2 Proporții .....	59
	6.3 Mărimi direct proporționale. Regula de trei simplă .....	59
	6.4 Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă .....	60
	6.5 Media aritmetică .....	61
	6.6 Media aritmetică ponderată .....	61
	6.7 Probabilitatea realizării unor evenimente .....	62
	6.8 Aplicații .....	62
7	Calcul algebric .....	64
	7.1 Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere .....	64
	7.2 Înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere .....	64
	7.3 Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere .....	65
	7.4 Reguli de calcul cu numere reale reprezentate prin litere .....	65
	7.5 Formule de calcul prescurtat .....	66

Respect pentru numeni si carti	
7.6 Descompunerea în factori .....	66
7.7 Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operații cu acestea .....	68
7.8 Inegalități .....	70
<b>8 Funcții .....</b>	<b>72</b>
<b>9 Ecuații și inecuații .....</b>	<b>75</b>
9.1 Ecuații de forma $ax + b = 0, x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .....	75
9.2 Ecuații de forma $ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ . .....	76
9.3 Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .....	77
9.4 Inecuații de forma $ax + b > 0 (\geq 0, < 0, \geq 0)$ $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ .....	79
9.5 Aplicații .....	79
<b>10 Sisteme de ecuații și inecuații de gradul I .....</b>	<b>80</b>
10.1 Sisteme de ecuații de gradul I cu două necunoscute .....	80
10.2 Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută .....	81
10.3 Aplicații .....	82

**Tiparul executat la**  
**EDITURA HYPERION**  
**CRAIOVA**  
**Str. Împăratul Traian Nr. 30**

## 1. Mulțimi RO

### 1.1. Notiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență

1. **Mulțimea** este o notiune primară, ea nu se definește.

Intuitiv, mulțimea reprezintă o colecție (grupare) de obiecte având o natură bine determinată, obiectele numindu-se **elemente**.

Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele unei mulțimi cu litere mici.

2. Fiind dată mulțimea  $A$  și  $a$  este un element al mulțimii  $A$ , atunci scriem  $a \in A$  și citim  $a$  **apartine** lui  $A$ .

Fiind dată mulțimea  $A$  și  $a$  nu este un element al mulțimii  $A$ , atunci scriem  $a \notin A$  și citim  $a$  **nu apartine** lui  $A$ .

3. Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează  $\emptyset$ .

**Exemplu:**  $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 3\} = \emptyset$ .

4. O mulțime  $A$  poate fi dată astfel:

a) prin enumerarea elementelor mulțimii între acolade, fiecare element al mulțimii scriindu-se o singură dată;

**Exemple:**  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ ,  $C = \{1, 2, x, 5, y\}$ .

b) cu ajutorul unei proprietăți ce caracterizează elementele mulțimii;

**Exemple:** 1.  $A$  este mulțimea cifrelor pare. Mulțimea  $A$  se poate scrie  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ;

2.  $B$  este mulțimea literelor cuvântului **matematică**. Mulțimea  $B$  se poate scrie  $B = \{m, a, t, e, i, c, \ddot{a}\}$ ;

3.  $C$  este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 30 și care se împart exact la 5. Ea se poate scrie  $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ .

4.  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ;

5.  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq x < 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ;

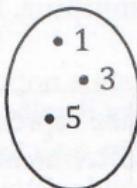
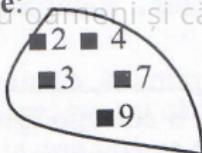
6.  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x|8\} = \{1, 2, 4, 8\}$ ;

7.  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x : 4 \text{ și } x < 30\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$ ;

8.  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq x < 30 \text{ și } x : 6\} = \{6, 12, 18, 24\}$ .

c) cu ajutorul diagramei Venn-Euler;

**Exemple:**



• 1	• 3	• 5
• 2	• 4	• 6
• a	• b	• c

5. Fiind dată mulțimea finită  $A$ , atunci numărul de elemente al mulțimii  $A$  se numește cardinalul lui  $A$  și se notează  $\text{card } A$ .

**Exemplu:**  $\text{card } \{1, 2, 3, 4\} = 4$ ;  $\text{card } \{a, b, c\} = 3$ .

6. Fiind date mulțimile  $A$  și  $B$ , spunem că mulțimile sunt egale și scriem  $A = B$ , dacă orice element din  $A$  aparține și mulțimii  $B$  și orice element din  $B$  aparține și mulțimii  $A$ .

**Exemplu:** a)  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  și  $B$  = mulțimea cifrelor impare.

b)  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq x < 10 \text{ și } x : 2\}$  și  $B = \{4, 6, 8\}$ .

**Observație.** Două mulțimi egale au același cardinal.

## 1.2 Relația între două mulțimi. Submulțimi

1. Fiind date mulțimile  $A$  și  $B$ , spunem că mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$  dacă orice element al mulțimii  $A$  este și element al mulțimii  $B$ . Notăm  $A \subset B$  și spunem că  $A$  este o **submulțime** a mulțimii  $B$ .

**Exemplu:** a) Dacă  $A = \{1, 2\}$  și  $B = \{1, 2, 3\}$ , atunci  $A \subset B$ .  
b) Dacă  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  și  $B = \{3, 5\}$  atunci  $B \subset A$ .

**Observație.** Evident  $A \subset A$  și  $\emptyset \subset A$ .

### 2. Proprietăți ale relației de incluziune

1.  $A \subset A$  - relația  $\subset$  este reflexivă;
2.  $A \subset B$  și  $B \subset A \Rightarrow A = B$  - relația  $\subset$  este antisimetrică;
3.  $A \subset B$  și  $B \subset C \Rightarrow A \subset C$  - relația  $\subset$  este tranzitivă.

# Libris

## 1.3 Operații cu submulțimi

1. Numim **intersecția** mulțimilor  $A$  și  $B$  și notăm  $A \cap B$ , mulțimea formată din elementele comune mulțimilor  $A$  și  $B$ .

Putem scrie:  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$ .

**Observație.** Intersecția a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident  $A \cap B = B \cap A$ .

**Exemplu:** Dacă  $A = \{1, 2, 7\}$  și  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , atunci  $A \cap B = \{1, 2\}$ .

2. Numim **reuniunea** mulțimilor  $A$  și  $B$  și notăm  $A \cup B$ , mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile  $A$  și  $B$ .

Putem scrie:  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$ .

**Observație.** Reuniunea a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident  $A \cup B = B \cup A$ .

**Exemplu:** Dacă  $A = \{1, 5, 9\}$  și  $B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$ , atunci  $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$ .

3. Numim **diferența** mulțimilor  $A$  și  $B$  și notăm  $A - B$ , mulțimea formată din elementele mulțimii  $A$  care nu aparțin mulțimii  $B$ .

Putem scrie:  $A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$ .

**Exemplu:** Dacă  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  și  $B = \{0, 1, 3, 4\}$ , atunci  $A - B = \{5, 7, 9\}$  și  $B - A = \{0, 4\}$ .

**Observație.** Diferența a două mulțimi nu este o operație comutativă, deoarece evident  $A - B \neq B - A$ . Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că  $A - B \neq B - A$ .

4. Fiind dată mulțimea  $E$  și  $A$  o submulțime a lui  $E$ , numim complementara lui  $A$  în raport cu  $E$  mulțimea  $E - A$ , care se notează  $C_E A$ .

Putem scrie:  $C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}$ .

**Exemplu:** Dacă  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  și  $A = \{1, 3\}$ , atunci  $C_E A = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

5. Numim **produs cartezian** al mulțimilor  $A$  și  $B$  și notăm  $A \times B$ , mulțimea formată din toate perechile care au primul element din mulțimea  $A$  și al doilea element din mulțimea  $B$ .

Putem scrie:  $A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ și } y \in B\}$ .

**Exemplu:** Fiind date mulțimile  $A = \{0, 1\}$  și  $B = \{1, 2, 3\}$ , avem:  $A \times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$  și  $B \times A = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$ .

**Observație.** Produsul cartezian a două mulțimi nu este comutativ. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că  $A \times B \neq B \times A$ .

## 1.4 Aplicații

1. Determinați mulțimile:

- $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 3n + 1, n = 1, 2, 3\}$ ;
- $B = \{x \in \mathbb{N} | 8x + 7 = 71\}$ ;
- $C = \{x \in \mathbb{N} | 11 \leq 5x + 1 < 31\}$ .

**Soluție.** a)  $n = 1 \Rightarrow x = 4, n = 2 \Rightarrow x = 7$  și  $n = 3 \Rightarrow x = 10$ . Atunci  $A = \{4, 7, 10\}$ .

b)  $8x + 7 = 71 \Rightarrow 8x = 71 - 7 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$ . Atunci:  $B = \{8\}$ .

c)  $5x + 1 \geq 11 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow x \geq 2$  și  $5x + 1 < 31 \Rightarrow 5x < 30 \Rightarrow x < 6$ . Rezultă atunci că  $2 \leq x < 6$  și cum  $x \in \mathbb{N}$ , rezultă  $x = 2, 3, 4, 5$  și  $C = \{2, 3, 4, 5\}$ .

2. Se consideră mulțimile  $A, B$ :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x = 7 - 2k, k \in \mathbb{N}^*\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} | x = 10 - 3k, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Să se determine  $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, A \times B, B \times A$ .

**Soluție.** Pentru mulțimea  $A$ :  $k = 1 \Rightarrow x = 5, k = 2 \Rightarrow x = 3, k = 3 \Rightarrow x = 1$  și atunci  $A = \{1, 3, 5\}$ .

Pentru mulțimea  $B$ :  $k = 1 \Rightarrow x = 7, k = 2 \Rightarrow x = 4, k = 3 \Rightarrow x = 1$  și atunci  $B = \{1, 4, 7\}$ .

Atunci avem:  $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{1, 4, 7\} = \{1\}$ ;

$$A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{1, 4, 7\} = \{1, 3, 4, 5, 7\};$$

$$A - B = \{1, 3, 5\} - \{1, 4, 7\} = \{3, 5\};$$

$$B - A = \{1, 4, 7\} - \{1, 3, 5\} = \{4, 7\};$$

$$A \times B =$$

$$= \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (3, 1), (3, 4), (3, 7), (5, 1), (5, 4), (5, 7)\}$$

$$B \times A =$$

$$= \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (7, 1), (7, 3), (7, 5)\}$$

3. Să se determine  $x, y \in \mathbb{N}$ , astfel încât să avem:

$$\{1, 3, x, 7, y, 11\} - \{1, 3, 7\} = \{5, 9, 11\}.$$

**Soluție.** Evident  $\{1, 3, x, 7, y, 11\} - \{1, 3, 7\} = \{x, y, 11\} = \{5, 9, 11\} \Rightarrow x = 5, y = 9.$

4. Să se determine mulțimea  $X$ , știind că:

a)  $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\};$

b)  $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

**Soluție.** Deoarece  $X \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4, 6\}$  rezultă  $4, 6 \in X$ .

Deoarece  $X \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  rezultă  $1, 2 \in X$ .

Atunci  $X = \{1, 2, 4, 6\}$ .

5. Să se determine mulțimile  $X$  și  $Y$ , știind că:

a)  $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\};$

b)  $X \cap Y = \{1, 2\};$

c)  $5 \notin X - Y;$

d) mulțimea  $X$  are mai multe elemente decât mulțimea  $Y$ .

**Soluție.** Din  $X \cap Y = \{1, 2\}$  rezultă  $1, 2 \in X; 1, 2 \in Y$ . Cum  $5 \notin X - Y$  și  $5 \notin X \cap Y$  rezultă  $5 \in Y - X$ , deci  $5 \in Y$ . Deoarece  $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  rezultă că  $3, 4 \in X$  sau  $3, 4 \in Y$  sau  $3 \in X$  și  $4 \in Y$  sau  $3 \in Y$  și  $4 \in X$ . Însă  $X$  are mai multe elemente decât  $Y$  și atunci rezultă că  $3, 4 \in X$ . Deci  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  și  $Y = \{1, 2, 5\}$ .

6. Determinați  $x, y \in \mathbb{N}$  astfel încât:

$$\{1, x, 7\} \cap \{3, y, 5\} = \{3, 7\}.$$

**Soluție.**  $3 \in \{1, x, 7\} \Rightarrow x = 3$  și  $7 \in \{3, y, 5\} \Rightarrow y = 7$ .