GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ ARITMETICĂ ȘI ALGEBRĂ PENTRU GIMNAZIU

EDITURA HYPERION

CUPRINS

Tiparul executat la
EDITURA HYPERION
CRAIOVA
Str. Împăratul Traian Nr. 30

1. Mulțimi

1.1 Noțiunea de mulțime. Element. Relația de apartenență

1. Mulțimea este o noțiune primară, ea nu se definește.

Intuitiv, mulţimea reprezintă o colecţie (grupare) de obiecte având o natură bine determinată, obiectele numindu-se **elemente**.

Mulţimile se notează cu litere mari, iar elementele unei mulţimi cu litere mici.

2. Fiind dată mulțimea A și a este un element al mulțimii A, atunci scriem $a \in A$ și citim a **aparține** lui A.

Fiind dată mulțimea A și a nu este un element al mulțimii A, atunci scriem $a \notin A$ și citim a **nu aparține** lui A.

3. Mulțimea care nu are nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează $\emptyset$.

Exemplu: $\{x \in \mathbf{N} | \ 3 < x < 3\} = \emptyset$.

4. O mulțime A poate fi dată astfel:

a) prin enumerarea elementelor mulțimii între acolade, fiecare element al mulțimii scriindu-se o singură dată;

Exemple: $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}, C = \{1, 2, x, 5, y\}$.

b) cu ajutorul unei proprietăți ce caracterizează elementele mulțimii;

Exemple: 1. A este mulțimea cifrelor pare. Mulțimea A se poate scrie $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$;

2. B este mulțimea literelor cuvântului **matematică.** Mulțimea B se poate scrie $B = \{m, a, t, e, i, c, ă\}$;

3. C este mulțimea numerelor naturale mai mici decât 30 și care se împart exact la 5. Ea se poate scrie $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$.

4. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

5. $A = \{x \in \mathbf{N}^* | \ 3 \leq x < 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$;

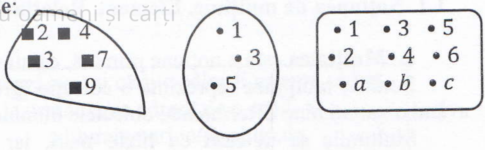
6. $A = \{x \in \mathbf{N}^* | \ x | 8\} = \{1, 2, 4, 8\}$;

7. $A = \{x \in \mathbf{N}^* | \ x \vdots 4 \text{ și } x < 30\} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$;

8. $A = \{x \in \mathbf{N}^* | \ 3 \leq x < 30 \text{ și } x \vdots 6 \} = \{6, 12, 18, 24\}$.

c) cu ajutorul diagramei **Venn-Euler**;

Exemple:



5. Fiind dată mulțimea finită A, atunci numărul de elemente al mulțimii A se numește cardinalul lui A și se notează $card\ A$.

Exemple: $card\{1,2,3,4\} = 4$; $card\{a,b,c\} = 3$.

6. Fiind date mulțimile A și B, spunem că mulțimile sunt egale și scriem $A = B$, dacă orice element din A aparține și mulțimii B și orice element din B aparține și mulțimii A.

Exemple: a) $A = \{1,3,5,7,9\}$ și B = mulțimea cifrelor impare.

b) $A = \{x \in \mathbf{N}^* |\ 3 \leq x < 10\ și\ x \vdots 2\}$ și $B = \{4,6,8\}$.

Observație. Două mulțimi egale au același cardinal.

1.2 Relația între două mulțimi. Submulțimi

1. Fiind date mulțimile A și B, spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Notăm $A \subset B$ și spunem că A este o **submulțime** a mulțimii B.

Exemple: a) Dacă $A = \{1,2\}$ și $B = \{1,2,3\}$, atunci $A \subset B$.

b) Dacă $A = \{1,3,5,7,9\}$ și $B = \{3,5\}$ atunci $B \subset A$.

Observație. Evident $A \subset A$ și $\emptyset \subset A$.

2. **Proprietăți** ale relației de incluziune

1. $A \subset A$ - relația $\subset$ este reflexivă;
2. $A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow A = B$ - relația $\subset$ este antisimetrică;
3. $A \subset B$ și $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ - relația $\subset$ este tranzitivă.

1.3 Operații cu submulțimi

1. Numim **intersecția** mulțimilor A și B și notăm $A \cap B$, mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B.

Putem scrie: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Observație. Intersecția a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident $A \cap B = B \cap A$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 2, 7\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cap B = \{1, 2\}$.

2. Numim **reuniunea** mulțimilor A și B și notăm $A \cup B$, mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A și B.

Putem scrie: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Observație. Reuniunea a două mulțimi este o operație comutativă, deoarece evident $A \cup B = B \cup A$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 5, 9\}$ și $B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$, atunci $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 9\}$.

3. Numim **diferența** mulțimilor A și B și notăm $A - B$, mulțimea formată din elementele mulțimii A care nu aparțin mulțimii B.

Putem scrie: $A - B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Exemplu: Dacă $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ și $B = \{0, 1, 3, 4\}$, atunci $A - B = \{5, 7, 9\}$ și $B - A = \{0, 4\}$.

Observație. Diferența a două mulțimi nu este o operație comutativă, deoarece evident $A - B \neq B - A$. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că $A - B \neq$ $\neq B - A$.

4. Fiind dată mulțimea E și A o submulțime a lui E, numim complementara lui A în raport cu E mulțimea $E - A$, care se notează $C_E A$.

Putem scrie: $C_E A = \{x | x \in E \text{ și } x \notin A\}$.

Exemplu: Dacă $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și $A = \{1, 3\}$, atunci $C_E A = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

5. Numim **produs cartezian** al mulțimilor A și B și notăm AxB, mulțimea formată din toate perechile care au primul element din mulțimea A și al doilea element din mulțimea B.

Putem scrie: $AxB = \{(x,y) | x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Exemplu: Fiind date mulțimile $A = \{0,1\}$ și $B = \{1,2,3\}$, avem: $AxB = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$ și $BxA = \{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$.

Observație. Produsul cartezian a două mulțimi nu este comutativ. Această afirmație rezultă și din exemplul de mai sus, unde se vede clar că $AxB \neq BxA$.

1.4 Aplicații

1. Determinați mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3n + 1, n = 1,2,3\}$;

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 8x + 7 = 71\}$;

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid 11 \leq 5x + 1 < 31\}$.

Soluție. a) $n = 1 \Rightarrow x = 4, n = 2 \Rightarrow x = 7$ și $n = 3 \Rightarrow x = 10$. Atunci $A = \{4,7,10\}$.

b) $8x + 7 = 71 \Rightarrow 8x = 71 - 7 \Rightarrow 8x = 64 \Rightarrow x = 8$. Atunci: $B = \{8\}$.

c) $5x + 1 \geq 11 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow x \geq 2$ și $5x + 1 < 31 \Rightarrow 5x < 30 \Rightarrow x < 6$. Rezultă atunci că $2 \leq x < 6$ și cum $x \in \mathbf{N}$, rezultă $x = 2,3,4,5$ și $C = \{2,3,4,5\}$.

2. Se consideră mulțimile A, B:

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 7 - 2k, k \in \mathbf{N}^*\}$

$B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 10 - 3k, k \in \mathbf{N}^*\}$.

Să se determine $A \cap B, A \cup B, A - B, B - A, AxB, BxA$.

Soluție. Pentru mulțimea A: $k = 1 \Rightarrow x = 5, k = 2 \Rightarrow x = 3, k = 3 \Rightarrow x = 1$ și atunci $A = \{1,3,5\}$.

Pentru mulțimea B: $k = 1 \Rightarrow x = 7, k = 2 \Rightarrow x = 4, k = 3 \Rightarrow x = 1$ și atunci $B = \{1,4,7\}$.

Atunci avem: $A \cap B = \{1,3,5\} \cap \{1,4,7\} = \{1\}$;

$A \cup B = \{1,3,5\} \cup \{1,4,7\} = \{1,3,4,5,7\}$;
$A - B = \{1,3,5\} - \{1,4,7\} = \{3,5\}$;
$B - A = \{1,4,7\} - \{1,3,5\} = \{4,7\}$;
$A\text{x}B =$
$= \{(1,1),(1,4),(1,7),(3,1),(3,4),(3,7),(5,1),(5,4),(5,7)\}$
$B\text{xA} =$
$= \{(1,1),(1,3),(1,5),(4,1),(4,3),(4,5),(7,1),(7,3),(7,5)\}$

3. Să se determine $x, y \in \mathbf{N}$, astfel încât să avem:

$$\{1,3,x,7,y,11\} - \{1,3,7\} = \{5,9,11\}.$$

Soluție. Evident $\{1,3,x,7,y,11\} - \{1,3,7\} = \{x,y,11\} = \{5,9,11\} \Rightarrow x = 5, y = 9$.

4. Să se determine mulțimea X, știind că:
a) $X \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$;
b) $X \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Soluție. Deoarece $X \cap \{3,4,5,6\} = \{4,6\}$ rezultă $4,6 \in X$. Deoarece $X \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$ rezultă $1,2 \in X$. Atunci $X = \{1,2,4,6\}$.

5. Să se determine mulțimile X și Y, știind că:
a) $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$;
b) $X \cap Y = \{1,2\}$;
c) $5 \notin X - Y$;
d) mulțimea X are mai multe elemente decât mulțimea Y.

Soluție. Din $X \cap Y = \{1,2\}$ rezultă $1,2 \in X; 1,2 \in Y$. Cum $5 \notin X - Y$ și $5 \notin X \cap Y$ rezultă $5 \in Y - X$, deci $5 \in Y$. Deoarece $X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$ rezultă că $3,4 \in X$ sau $3,4 \in Y$ sau $3 \in X$ și $4 \in Y$ sau $3 \in Y$ și $4 \in X$. Însă X are mai multe elemente decât Y și atunci rezultă că $3,4 \in X$. Deci $X = \{1,2,3,4\}$ și $Y = \{1,2,5\}$.

6. Determinați $x, y \in \mathbf{N}$ astfel încât:

$$\{1,x,7\} \cap \{3,y,5\} = \{3,7\}.$$

Soluție. $3 \in \{1,x,7\} \Rightarrow x = 3$ și $7 \in \{3,y,5\} \Rightarrow y = 7$.