

**Libris** .RO

Respect pentru oamenii de știință  
**GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER**

**MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR  
DE MATEMATICĂ**

**TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE  
PENTRU LICEU**

**EDITURA HYPERION**

1	Trigonometrie .....	3
1.1	Unități de măsură pentru unghiuri și arce .....	3
1.2	Rezolvarea triunghiului dreptunghic .....	4
1.2.1	Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit al unui triunghi <i>ABC</i> dreptunghic în <i>A</i> .....	4
1.2.2	Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile uzuale ale unui triunghi dreptunghic .....	4
1.2.3	Cazuri de rezolvare a triunghiului dreptunghic .....	5
1.2.4	Egalități trigonometrice într-un triunghi dreptunghic .....	6
1.2.5	Aplicații .....	6
1.3	Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice.	8
1.3.1	Cercul trigonometric .....	8
1.3.2	Funcții trigonometrice .....	9
1.4	Periodicitatea, paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice .....	12
1.4.1	Periodicitatea funcțiilor trigonometrice .....	12
1.4.2	Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice .....	13
1.5	Reducerea la primul cadran .....	13
1.6	Graficele funcțiilor trigonometrice .....	15
1.7	Formule de legătură între funcțiile trigonometrice .....	18
1.8	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri .....	20
1.9	Formule pentru funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, ale unghiului triplu și ale jumătății	

Respect pentru cunoștințe și cărți	
unui unghi .....	23
1.10 Transformarea sumei sau diferenței de funcții trigonometrice în produs .....	25
1.11 Transformarea produsului de funcții trigonometrice în sumă .....	26
1.12 Identități trigonometrice .....	27
1.13 Transformarea unei expresii trigonometrice într-un produs de alte expresii trigonometrice .....	32
1.14 Expresii care nu depind de parametri .....	33
1.15 Funcții trigonometrice inverse .....	34
1.16 Inegalități trigonometrice .....	36
1.17 Ecuații trigonometrice .....	37
1.18 Aplicațiile trigonometriei în algebră .....	44
1.18.1 Numere complexe sub formă trigonometrică .....	44
1.18.2 Operații cu numere complexe sub formă trigonometrică .....	45
1.18.3 Rădăcinile de ordin $n$ ale unui număr complex .....	47
1.18.4 Ecuații binome .....	48
1.19 Aplicațiile trigonometriei în geometrie .....	49
<b>2 Geometrie .....</b>	<b>61</b>
2.1 Paralelism și calcul vectorial .....	61
2.1.1 Segmente orientate .....	61
2.1.2 Vectori. Operații cu vectori .....	64
2.1.3 Descompunerea unui vector după direcții date .....	69
2.1.4 Vectori coliniari .....	70
2.1.5 Vectorul de poziție al unui punct .....	72
2.1.6 Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi. Relația lui Sylvester .....	74
2.1.7 Teorema lui Menelaus. Teorema lui Ceva .....	76

Respect pentru oameni și cărți	
2.1.8 Produsul scalar a doi vectori .....	77
2.2 Elemente de geometrie analitică .....	79
2.2.1 Reper cartezian. Coordonate carteziene ..	79
2.2.2 Coordonatele unui vector. Operații cu vectori în coordonate carteziene .....	80
2.2.3 Coordonatele punctului care împarte un segment într-un raport dat .....	81
2.2.4 Ecuații ale dreptei în plan .....	82
2.2.5 Coliniaritate, concurență .....	83
2.2.6 Paralelism, perpendicularitate .....	84
2.2.7 Calcule de distanțe și arii .....	86

# Libris

## 1. Trigonometrie

### 1.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce

**Definiție.** Unghiul reprezintă figura geometrică formată din două semidrepte închise, care au aceeași origine.

**Definiție.** Gradul sexagesimal reprezintă măsura unghiului egal cu  $180^\circ$  a parte dintr-un unghi cu laturile în prelungire și reprezintă unitatea de măsură pentru unghiuri.

Valoarea maximă a măsurii unui unghi este  $180^\circ$ .

**Definiție.** Fiind dat un cerc de rază  $r$ , un arc mic  $AB$  de pe acest cerc are măsura de 1 **radian**, dacă lungimea arcului  $AB$  este egală cu  $r$ .

Un cerc are măsura în radiani egală cu  $2\pi$ .

**Exemplu:**  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ ,  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ ,  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ,  $180^\circ = \pi, \dots$

Fiind dat un cerc și un arc al cercului care are măsura în grade egală  $n$  și măsura în radiani egală cu  $\alpha$ , atunci are loc relația:

$$n = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}.$$

**Exemplu:** a) Pentru un arc de  $30^\circ$ , măsura în radiani este:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Pentru un arc de  $90^\circ$ , măsura în radiani:  $\alpha = \frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$ .

Fiind dat un cerc de rază  $r$ , două puncte pe cerc  $A, B$  și  $\alpha$  măsura în radiani a arcului  $AB$ , atunci are loc formula:

$$l(\text{arc } AB) = r \cdot \alpha.$$

**Exemplu:** a) Fiind dat un cerc de rază 2 cm și două puncte  $A, B$  pe cerc astfel încât măsura în radiani a arcului  $AB$  este  $\pi$ , atunci lungimea arcului de cerc  $AB$  este:  $l(\text{arc } AB) = 2 \cdot \pi = 2\pi$ .

b) Lungimea unui cerc de rază  $r$  este  $2\pi r$ .

## 1.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic

**Definitie.** A rezolva un triunghi dreptunghic înseamnă a determina lungimile tuturor laturilor și mărimele tuturor unghiurilor sale atunci când se cunosc o parte din aceste mărimi.

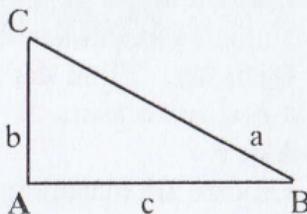
### 1.2.1 Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit al unui triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$

$$\sin B = \frac{b}{a}, \quad \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\sin C = \frac{c}{a}, \quad \cos C = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$$



### 1.2.2 Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile uzuale ale unui triunghi dreptunghic

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

## 1.2.3 Cazuri de rezolvare a triunghiului dreptunghic

a) Se cunosc catetele  $b$  și  $c$ . Se aplică teorema lui Pitagora și se obține:  $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ ;  $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ , de unde rezultă  $B$ . Apoi avem  $C = 90^\circ - B$ .

**Exemplu:** Se dau  $b = 5\sqrt{3}$ ;  $c = 5$ . Atunci  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{75 + 25} = \sqrt{100} = 10$ .  $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow B = 60^\circ$ .  $C = 90^\circ - B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

b) Se cunosc ipotenuza  $a$  și cateta  $b$ . Se aplică teorema lui Pitagora și se obține  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ;  $\sin B = \frac{b}{a}$ , de unde rezultă  $B$ , apoi  $C = 90^\circ - B$ .

**Exemplu.** Se dau  $a = 6$ ,  $b = 3$ . Atunci  $c = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ;  $\sin B = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 30^\circ$ ,  $C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

c) Se cunosc ipotenuza  $a$  și un unghi ascuțit, de exemplu  $B$ . Atunci avem:  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ ,  $C = 90^\circ - B$ .

**Exemplu:**  $a = 10$ ,  $B = 30^\circ$ . Atunci  $b = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5$ ;  $c = 10 \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}$ ;  $C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

d) Se cunosc o catetă și un unghi ascuțit, de exemplu  $b$ ,  $B$ . Atunci:  $a = \frac{b}{\sin B}$ ;  $c = b \operatorname{ctg} B$ ;  $C = 90^\circ - B$ .

**Exemplu:**  $b = 4$ ,  $B = 45^\circ$ . Atunci  $a = \frac{4}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2}$ ;  $c = 4 \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = 4$ ;  $C = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

# Libris.ro

## 1.2.4. Egalități trigonometrice într-un triunghi dreptunghic

Între laturile și unghiiurile unui triunghi dreptunghic există diverse egalități, care se demonstrează în general folosind formulele date de funcțiile trigonometrice într-un triunghi dreptunghic și / sau teorema lui Pitagora.

### Exemple:

$$1. \sin B + \cos B = \sin C + \cos C;$$

**Soluție.**  $\sin B = \frac{b}{a}; \cos B = \frac{c}{a}; \sin C = \frac{c}{a}; \cos C = \frac{b}{a}.$

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}.$$

$$2. \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2;$$

**Soluție.**  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2, \text{ adevărată.}$$

$$3. (1 + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{(a + b + c)^2}{2a^2}.$$

**Soluție.**  $(1 + \cos B)(1 + \cos C) = 1 + \cos B + \cos C +$   
 $+ \cos B \cos C = 1 + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{bc}{a^2} = \frac{a^2 + a(b + c) + bc}{a^2} =$   
 $= \frac{2a^2 + 2a(b + c) + 2bc}{2a^2} = \frac{a^2 + a^2 + 2a(b + c) + 2bc}{2a^2} =$   
 $= \dots = \frac{(a + b + c)^2}{2a^2}.$

## 1.2.5 Aplicații

1. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , știind că:  
 $b + c = 7$  și  $b - c = 1$ .

**Soluție.** Rezolvând sistemul format din cele două relații obținem  $b = 4$  și  $c = 3$ . Din teorema lui Pitagora, rezultă  $a = 5$ .

Apoi  $\sin B \equiv \frac{4}{5}$  și  $\sin C \equiv \frac{3}{5}$  și cărti

2. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , știind că  $B = 2C$  și că mediana  $AM = 12$ .

**Soluție.** Știm că  $BC = 2 \cdot AM = 2 \cdot 12 = 24$ . Între unghiuri avem relațiile:  $B = 2C$ ,  $B + C = 90^0$ , de unde  $B = 60^0$ ,  $C = 30^0$ .

Atunci  $AB = \frac{BC}{2} = 12$  și  $AC = BC \sin 60^0 = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ .

3. Să se rezolve triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , știind că înălțimea  $AA' = 5$  și  $C = 2B$ .

**Soluție.** Avem că:  $B + C = 90^0$  și  $C = 2B$  și prin rezolvarea sistemului obținem  $B = 30^0$  și  $C = 60^0$ .

Din triunghiul dreptunghic  $AA'B$  avem:

$$AB = \frac{AA'}{\sin B} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10, \text{ iar din triunghiul dreptunghic } AA'C,$$

$$AC = \frac{AA'}{\sin C} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ și } BC = 2AC = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

4. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  este adevărată egalitatea:

$$\sin^2 B (\tg B + \tg C) = \tg B.$$

**Soluție.**  $\sin^2 B (\tg B + \tg C) = \tg B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b^2(b^2 + c^2)}{a^2 bc} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(b^2 + c^2)}{a^2 c} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a^2 b}{a^2 c} = \frac{b}{c}.$$

### 1.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice

#### 1.3.1 Cercul trigonometric

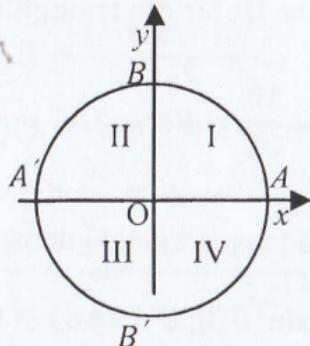
**Definiție.** Se numește cerc trigonometric, un cerc de rază 1, înzestrat cu sens pozitiv sau sens trigonometric ( sens contrar acelor de ceasornic ) și un punct  $A$  fixat numit origine.

Fiind dat un cerc trigonometric de centru  $O$  și origine  $A$ , vom alege un reper cartezian, pe care-l vom numi **reper cartezian standard** după cum urmează:

- originea axelor de coordonate va fi punctul  $O$ ;
- axa  $Ox$  va fi dreapta  $OA$ , astfel încât vectorul  $\overrightarrow{OA}$  să aibă sensul pozitiv;
- axa  $Oy$  va fi dreapta  $OB$  perpendiculară pe  $OA$ , cu punctul  $B$  pe cerc, astfel încât arcul mic  $AB$  să păstreze sensul trigonometric.

Notăm cu  $A'$  și respectiv  $B'$  punctele diametral opuse ale lui  $A$  și respectiv  $B$  în cercul trigonometric.

Dreptele  $AA'$  și  $BB'$  împart cercul trigonometric în patru părți numite cadrane, după cum urmează:



- cadranul I – obținut prin parcursarea în sens trigonometric de la  $A$  la  $B$ , corespunde intervalului  $(0, \frac{\pi}{2})$ ;
- cadranul II – obținut prin parcursarea în sens trigonometric de la  $B$  la  $A'$ , corespunde intervalului  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ;