GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER

MEMORATOR ȘI ÎNDRUMAR DE MATEMATICĂ

TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE

PENTRU LICEU

EDITURA HYPERION

CUPRINS

1. Trigonometrie

1.1 Unități de măsură pentru unghiuri și arce

Definiție. **Unghiul** reprezintă figura geometrică formată din două semidrepte închise, care au aceeași origine.

Definiție. Gradul sexagesimal reprezintă măsura unghiului egal cu a 180 a parte dintr-un unghi cu laturile în prelungire și reprezintă unitatea de măsură pentru unghiuri.

Valoarea maximă a măsurii unui unghi este 180^0.

Definiție. Fiind dat un cerc de rază r, un arc mic AB de pe acest cerc are măsura de 1 **radian**, dacă lungimea arcului AB este egală cu r.

Un cerc are măsura în radiani egală cu 2π.

Exemple: $30^0 = \frac{\pi}{6}, 45^0 = \frac{\pi}{4}, 90^0 = \frac{\pi}{2}, 180^0 = \pi, \cdots$

Fiind dat un cerc și un arc al cercului care are măsura în grade egală n și măsura în radiani egală cu α, atunci are loc relația:

$$n = \frac{180^0 \cdot \alpha}{\pi}.$$

Exemple: a) Pentru un arc de 30^0, măsura în radiani este:

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 30^0}{180^0} = \frac{\pi}{6}.$$

b) Pentru un arc de 90^0, măsura în radiani: $\alpha = \frac{\pi \cdot 90^0}{180^0} = \frac{\pi}{2}$.

Fiind dat un cerc de rază r, două puncte pe cerc A, B și α măsura în radiani a arcului AB, atunci are loc formula:

$$l(\text{arc } AB) = r \cdot \alpha.$$

Exemplu: a) Fiind dat un cerc de rază 2 cm și două puncte A, B pe cerc astfel încât măsura în radiani a arcului AB este π, atunci lungimea arcului de cerc AB este: $l(\text{arc } AB) = 2 \cdot \pi = 2\pi$.

b) Lungimea unui cerc de rază r este $2\pi r$.

1.2 Rezolvarea triunghiului dreptunghic

Definiție. A rezolva un triunghi dreptunghic înseamnă a determina lungimile tuturor laturilor și mărimile tuturor unghiurilor sale atunci când se cunosc o parte din aceste mărimi.

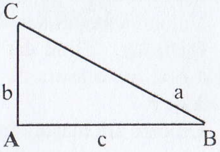
1.2.1 Funcțiile trigonometrice ale unui unghi ascuțit al unui triunghi *ABC* dreptunghic în *A*

$$\sin B = \frac{b}{a},\quad \cos B = \frac{c}{a}$$

$$\sin C = \frac{c}{a},\quad \cos C = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{c}{b},\quad \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}$$



1.2.2 Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile uzuale ale unui triunghi dreptunghic

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1.2.3 Cazuri de rezolvare a triunghiului dreptunghic

a) Se cunosc catetele b și c. Se aplică teorema lui Pitagora și se obține: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c}$, de unde rezultă B. Apoi avem $C = 90^0 - B$.

Exemplu: Se dau $b = 5\sqrt{3}; c = 5$. Atunci $a = \sqrt{b^2 + c^2} =$ $= \sqrt{75 + 25} = \sqrt{100} = 10$. $\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c} = \dfrac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \Rightarrow B = 60^0$. $C = 90^0 - B = 90^0 - 60^0 = 30^0$.

b) Se cunosc ipotenuza a și cateta b. Se aplică teorema lui Pitagora și se obține $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; $\sin B = \dfrac{b}{a}$, de unde rezultă B, apoi $C = 90^0 - B$.

Exemplu. Se dau $a = 6, b = 3$. Atunci $c = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$; $\sin B = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B = 30^0, C = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

c) Se cunosc ipotenuza a și un unghi ascuțit, de exemplu B. Atunci avem: $b = a \sin B, c = a \cos B,\ C = 90^0 - B$.

Exemplu: $a = 10, B = 30^0$. Atunci $b = 10 \cdot \sin 30^0 = 5$; $c = 10 \cdot \cos 30^0 = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3};\ C = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

d) Se cunosc o catetă și un unghi ascuțit, de exemplu b, B. Atunci: $a = \dfrac{b}{\sin B}; c = b \operatorname{ctg} B;\ C = 90^0 - B$.

Exemplu: $b = 4, B = 45^0$. Atunci $a = \dfrac{4}{\sin 45^0} = 4\sqrt{2}$; $c = 4 \cdot \operatorname{ctg} 45^0 = 4;\ C = 90^0 - 45^0 = 45^0$.

1.2.4. Egalități trigonometrice într-un triunghi dreptunghic

Între laturile și unghiurile unui triunghi dreptunghic există diverse egalități, care se demonstrează în general folosind formulele date de funcțiile trigonometrice într-un triunghi dreptunghic și / sau teorema lui Pitagora.

Exemple:

1. $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$;

Soluție. $\sin B = \dfrac{b}{a}$; $\cos B = \dfrac{c}{a}$; $\sin C = \dfrac{c}{a}$; $\cos C = \dfrac{b}{a}$.

$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$.

2. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$;

Soluție. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} = 2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$, adevărată.

3. $(1 + \cos B)(1 + \cos C) = \dfrac{(a + b + c)^2}{2a^2}$.

Soluție. $(1 + \cos B)(1 + \cos C) = 1 + \cos B + \cos C +$

$+ \cos B \cos C = 1 + \dfrac{c}{a} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{bc}{a^2} = \dfrac{a^2 + a(b + c) + bc}{a^2} =$

$= \dfrac{2a^2 + 2a(b + c) + 2bc}{2a^2} = \dfrac{a^2 + a^2 + 2a(b + c) + 2bc}{2a^2} =$

$= \cdots = \dfrac{(a + b + c)^2}{2a^2}$.

1.2.5 Aplicații

1. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, știind că: $b + c = 7$ și $b - c = 1$.

Soluție. Rezolvând sistemul format din cele două relații obținem $b = 4$ și $c = 3$. Din teorema lui Pitagora, rezultă $a = 5$. Apoi $\sin B = \frac{4}{5}$ și $\sin C = \frac{3}{5}$.

2. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, știind că $B = 2C$ și că mediana $AM = 12$.

Soluție. Știm că $BC = 2 \cdot AM = 2 \cdot 12 = 24$. Între unghiuri avem relațiile: $B = 2C, B + C = 90^0$, de unde $B = 60^0, C = 30^0$. Atunci $AB = \frac{BC}{2} = 12$ și $AC = BC\ \sin 60^0 = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$.

3. Să se rezolve triunghiul ABC dreptunghic în A, știind că înălțimea $AA' = 5$ și $C = 2B$.

Soluție. Avem că: $B + C = 90^0$ și $C = 2B$ și prin rezolvarea sistemului obținem $B = 30^0$ și $C = 60^0$.

Din triunghiul dreptunghic $AA'B$ avem:

$AB = \frac{AA'}{\sin B} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$, iar din triunghiul dreptunghic $AA'C$,

$AC = \frac{AA'}{\sin C} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ și $BC = 2AC = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

4. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC este adevărată egalitatea:

$$\sin^2 B(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = \operatorname{tg} B.$$

Soluție. $\sin^2 B(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = \operatorname{tg} B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b^2(b^2 + c^2)}{a^2bc} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(b^2 + c^2)}{a^2c} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a^2b}{a^2c} = \frac{b}{c}.$$

1.3 Cercul trigonometric. Funcții trigonometrice

1.3.1 Cercul trigonometric

Definiție. Se numește cerc trigonometric, un cerc de rază 1, înzestrat cu sens pozitiv sau sens trigonometric (sens contrar acelor de ceasornic) și un punct A fixat numit origine.

Fiind dat un cerc trigonometric de centru O și origine A, vom alege un reper cartezian, pe care-l vom numi **reper cartezian standard** după cum urmează:

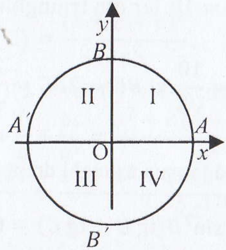
– originea axelor de coordonate va fi punctul O;

– axa Ox va fi dreapta OA, astfel încât vectorul $\overrightarrow{OA}$ să aibă sensul pozitiv;

– axa Oy va fi dreapta OB perpendiculară pe OA, cu punctul B pe cerc, astfel încât arcul mic AB să păstreze sensul trigonometric.

Notăm cu A' și respectiv B' punctele diametral opuse ale lui A și respectiv B în cercul trigonometric.

Dreptele AA' și BB' împart cercul trigonometric în patru părți numite cadrane, după cum urmează:



– cadranul I – obținut prin parcurgerea în sens trigonometric de la A la B, corespunde intervalului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

– cadranul II – obținut prin parcurgerea în sens trigonometric de la B la A', corespunde intervalului $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$;