

Matematică

**- exerciții și probleme -
pentru clasa a VII-a**

Teste inițiale	7
----------------------	---

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor raționale

1. Numere raționale	9
2. Modulul și opusul unui număr rațional	10
3. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor	12
4. Aproximarea numerelor raționale	13
5. Compararea și ordonarea numerelor raționale	14
6. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr rațional	16
7. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți	17
8. Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale. Proprietăți	19
9. Ridicarea la putere a unui număr rațional. Reguli de calcul cu puteri	21
10. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	23
11. Ecuații de forma $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$	26
12. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	28
Teste de evaluare	30

Capitolul II. Mulțimea numerelor reale

1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	32
2. Algoritm de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr natural. Aproximări	34
3. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale	35
4. Modulul unui număr real. Definiție. Proprietăți. Parte întreagă	37
5. Compararea și ordonarea numerelor reale Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări	38
6. Reguli de calcul cu radicali	40
7. Adunarea și scăderea numerelor reale. Proprietăți	41
8. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale	42
9. Raționalizarea numitorilor	44
10. Ridicarea la putere a unui număr real. Reguli de calcul cu puteri	45
11. Ordinea efectuării operațiilor	47
12. Media geometrică a două numere reale pozitive	49
Teste de evaluare	50

Capitolul III. Calcul algebric

1. Utilizarea literelor în calcule	52
2. Formule de calcul prescurtat	56
3. Descompunerea în factori	59
4. Ecuații de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{Q}$	61
Teste de evaluare	62

Capitolul IV. Ecuații și inecuații

1. Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale	65
2. Ecuații de forma $ax+b=0$, $a, b \in \mathbb{R}$	67
3. Proprietăți ale relației de inegalitate „ \leq ” pe mulțimea numerelor reale	70
4. Inecuații de forma $ax+b > 0$, ($<$, \leq , \geq), $a, b \in \mathbb{R}$ cu x în \mathbb{Z}	72
5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor	73
Teste de evaluare.....	76

Capitolul V. Elemente de organizare a datelor

1. Gruparea și reprezentarea datelor	79
2. Probabilitatea realizării unor evenimente	84
3. Reper cartezian. Produsul cartezian a două mulțimi nevide Reprezentarea într-un sistem de axe perpendiculare a unor perechi de numere întregi. Distanța dintre două puncte din plan.....	86
4. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice	91
Teste de evaluare.....	94

GEOMETRIE

Capitolul I. Patrulatere

1. Patrulatere convexe	98
2. Paralelogramul	101
3. Dreptunghiul	104
4. Rombul.....	106
5. Pătratul.....	109
6. Trapezul	111
Teste de evaluare.....	114
7. Arii și perimetre ale triunghiurilor și patruleterelor studiate	117
Teste de evaluare.....	124

Capitolul II. Asemănarea triunghiurilor

1. Segmente proporționale	127
2. Teorema lui Thales	129
3. Linia mijlocie în triunghi. Proprietăți Centrul de greutate al unui triunghi	134
4. Linia mijlocie în trapez. Proprietăți	136
5. Triunghiuri asemenea. Proprietăți. Teorema fundamentală a asemănării ...	138
6. Criterii de asemănare a triunghiurilor.....	142
Teste de evaluare.....	147

Aplicații practice	150
Exerciții și probleme recapitulative	155

Capitolul III. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă	161
2. Teorema înălțimii și teorema catetei	164
3. Teorema lui Pitagora	167
Teste de evaluare.....	170

Capitolul IV. Cercul

1. Definiție. Elemente în cerc	173
2. Unghi la centru. Măsura arcelor. Arce congruente Coarde și arce în cerc	175
3. Unghi înscris în cerc. Triunghi înscris în cerc Patrulater înscris în cerc	178
4. Pozițiile relative ale unei drepte față de cerc Triunghi circumscris unui cerc	180
5. Poligoane regulate.....	182
6. Lungimea cercului. Aria discului.....	185
Teste de evaluare.....	187

Capitolul V. Noțiuni de trigonometrie

1. Unități de măsură pentru unghiuri	190
2. Rapoarte constante în triunghiul dreptunghic	191
3. Utilizarea elementelor de trigonometrie în rezolvarea problemelor de geometrie	194
Teste de evaluare.....	197

Aplicații practice	200
Exerciții recapitulative	206
Recapitulare finală	212
Teste finale	217

Subiecte pentru teză. Semestrul I	220
Subiecte pentru teză. Semestrul al II-lea	223

Răspunsuri	226
-------------------------	-----

Capitolul I. Mulțimea numerelor raționale

1. Numere raționale

Noțiuni de teorie

Definiție: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ se numește **mulțimea numerelor raționale**

Observația 1: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Observația 2: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Aflăm: Un număr rațional poate fi reprezentat atât prin fracție ordinară, cât și prin fracție zecimală (*finită sau periodică*). Din fracția ordinară, prin împărțirea număratorului la numitor, vom obține fracția zecimală. Pentru transformarea din forma zecimală în cea ordinară se procedează după cum urmează (*exemplificarea este pentru fracții zecimale pozitive subunitare, $a_i, b_i \in \mathbb{N}, i, k, m \in \mathbb{N}^*$*):

$$\overline{0, a_1 a_2 \dots a_k} = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{100 \dots 0}_k}, \quad \overline{0, (a_1 a_2 \dots a_k)} = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{99 \dots 9}_k}$$

$$\overline{0, a_1 a_2 \dots a_k (b_1 b_2 \dots b_m)} = \frac{a_1 a_2 \dots a_k b_1 b_2 \dots b_m - a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{99 \dots 9}_{m} \underbrace{00 \dots 0}_k}$$

Să rezolvăm!

*

1. Dați câte trei exemple de reprezentanți (două fracții ordinare și o fracție zecimală) pentru fiecare dintre numerele raționale următoare:

a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{48}{100}$; e) $\frac{59}{44}$.

2. Dați cinci exemple de numere care să fie:

- a) naturale; b) întregi, dar nu și naturale;
 c) raționale pozitive; d) raționale, dar nu și întregi;
 e) raționale negative; f) raționale subunitare.

**

3. Să se scrie sub formă de fracție zecimală următoarele numere raționale:

a) $\frac{27}{10}, \frac{103}{10}, \frac{43}{100}, \frac{1097}{100}, \frac{4532}{1000}, \frac{73}{1000}$; b) $\frac{28}{5}, \frac{5}{8}, \frac{57}{40}, \frac{87}{25}, \frac{507}{32}, \frac{63}{20}$,
 c) $\frac{5}{3}, \frac{11}{9}, \frac{83}{33}, \frac{7}{11}, \frac{58}{333}, \frac{1043}{999}$; d) $\frac{7}{12}, \frac{55}{18}, \frac{75}{22}, \frac{109}{132}, \frac{797}{792}, \frac{703}{825}$.

4. Să se scrie sub formă de fracție ordinară ireductibilă următoarele numere raționale:

- a) 1,7; 2,45; 0,048; 15,2; 9,005; 0,485;
 b) 0,(7); 0,(63); 0,(504); 24,(75); 5,(8); 2,(207);
 c) 0,1(6); 0,42(7); 0,7(42); 6,43(8); 2,9(84); 1,36(141).

5. Să se scrie sub forma unei fracții zecimale numărul rațional:

- a) $\frac{7}{4}$; b) $\frac{5}{16}$; c) $\frac{11}{75}$; d) $\frac{35}{9}$; e) $\frac{4}{7}$.

6. Să se afle a 2017-a cifră zecimală a numărului:

- a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{23}{28}$; d) $\frac{19}{18}$; e) $\frac{5}{21}$.

7. Să se afle suma primelor 50 cifre zecimale, ale numărului:

- a) 3,12(35); b) 12,1(102); c) $\frac{2}{75}$; d) $\frac{1}{125}$; e) $\frac{5}{33}$.

8. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor.

- a) $2,(35) \in \mathbb{Q}$ b) $1,2(05) \notin \mathbb{Q}$ c) $7,001(2) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$
 d) $9/2 \notin \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ e) $(-9)/3 \notin \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ f) $-2,(7) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

2. Modulul și opusul unui număr rațional

Noțiuni de teorie

Notăție: Valoarea absolută sau modulul unui număr rațional x se notează: $|x|$.

Definiție: Fie x și x_i din \mathbb{Q} , $x = \frac{a}{b}$ cu $b \neq 0$, $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ cu $b_i \neq 0$, $i = \overline{1,2}$ unde a , b , a_i și b_i sunt numere întregi.

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{sau (mai restrâns)} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

Proprietățile modulului

- $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |-x|$;
- $|x| = \max(-x, x)$;
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$;
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$;
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$;
- $|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|$;
- $|x| \leq q$, $q \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow -q \leq x \leq q$.

Observație: Oricare număr rațional nenul x , are un **opus** notat $-x$, astfel încât suma lor este 0: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

1. Pentru $x = 2\frac{2}{3}$, să se determine:

- a) $|x-3|$; b) $x + \frac{5}{6}$; c) $x - 2\frac{2}{3}$; d) $|2-x|$; e) $\frac{2}{3} - x$.

2. Dați exemple de numere raționale, două pozitive și două negative, știind că modulul lor este:

- a) mai mic decât 1; b) mai mare decât 5;
c) mai mic decât $\frac{3}{7}$; d) cuprins între 2 și 3;
e) cuprins între 3, 2(45) și 3,2(5); f) mai mare decât $5\frac{6}{7}$.

**

3. Știind că $x \in \{-1\frac{1}{2}; \frac{17}{5}; -5,3; 4,8\}$, precizați valoarea lui, dacă:

- a) $|x| = -x$ și $x \geq -3$; b) $|x| = x$ și $x \leq 4$;
c) $|x| = -x$ și $x \leq -2$; d) $|x| = x$ și $x \geq 4$.

4. Se dă mulțimea $A = \{-15,2; -\frac{35}{4}; -\frac{20}{3}; -4,8; -2; -1,25; 3,8; \frac{23}{4}; \frac{49}{5}; \frac{109}{3}\}$.

Determinați numerele raționale a , în fiecare dintre situațiile următoare:

- d) $a \in A$ și $|a| < 2$; b) $a \in A$ și $|a| > 15$;
c) $a \in A$ și $|a| \leq 2$; d) $a \in A$ și $3 < |a| < 10$.

5. Precizați opusul pentru fiecare dintre numerele de mai jos:

- a) $-\frac{9}{5}$; b) 7,(3); c) $2\frac{2}{15}$; d) $-(-0,(5))$.

6. Se dă mulțimea $M = \{-12; -7\frac{2}{3}; -8,(2); -5; -\frac{4}{3}; -0,5; 0; \frac{1}{2}; 1,(3); \frac{74}{9}; 7,(3)\}$.

Să se determine elementele mulțimii

$Q = \{(x,y) \mid x \text{ și } y \text{ sunt elemente din } M, \text{ numere opuse}\}$.

7. Verificați dacă numerele x și y sunt numere opuse:

- a) $x = (2,17 + 3,83) \cdot (-\frac{1}{2})$, $y = (3\frac{1}{5} - \frac{2}{5}) \cdot 1\frac{1}{14}$;
b) $x = 4 \cdot (17,375 - 9,125) \cdot \frac{1}{11}$, $y = [3,(15) - 2,(45)] \cdot \frac{11}{23}$;
c) $x = 3\frac{2}{5} - \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3} - 3\frac{2}{5}$;
d) $x = 5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{5}$, $y = 5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5}$.

8. Se dă mulțimea $A = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \in D_6, b \in D_9\}$ și mulțimea

$B = \{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}^*, |x| \leq 4, |y| \leq 3\}$. Determinați:

- a) $A \cap B$; b) $A \cap \mathbb{N}$; c) $B \cap \mathbb{Z}$; d) $B - \mathbb{Z}$.

3. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Respectiv

Noțiuni de teorie

Aflăm: Oricărui număr rațional x îi corespunde pe axa numerelor un punct și numai unul. Acest punct se va afla la distanța $|x|$ față de originea axei și va fi în dreapta originii dacă numărul $x > 0$, respectiv în stânga dacă $x < 0$. Numărului zero îi corespunde chiar originea axei.

Să rezolvăm!

*

1. Să se reprezinte pe axa numerelor următoarele puncte:

a) $M\left(-\frac{5}{3}\right)$, $N\left(-\frac{1}{3}\right)$, $P\left(\frac{4}{3}\right)$ și $Q\left(2\frac{2}{3}\right)$;

b) $M\left(-\frac{7}{5}\right)$, $N\left(\frac{3}{5}\right)$, $P\left(\frac{9}{5}\right)$ și $Q\left(-\frac{2}{5}\right)$;

c) $M(-3,5)$, $N(2,5)$, $P(1,75)$ și $Q(-1,25)$.

**

2. Fie x un număr rațional nenul, iar $-x$ opusul său.

a) dacă reprezentăm pe axa numerelor punctele $A(x)$ și $A'(-x)$, ce putem spune despre punctele A și A' ?

b) să se reprezinte pe axa numerelor punctele $A(x)$ și $A'(-x)$ pentru:

i) $x = 3,2$; ii) $x = 2\frac{2}{3}$; iii) $x = -\frac{5}{8}$; iv) $x = 1,5$.

3. Fie x un număr rațional nenul. Să se reprezinte pe axa numerelor punctele $A(x)$, $B(-x)$, $C(x+1)$, $D(x-2)$, $E(2x)$ și $F(1-x)$ dacă:

a) $x = \frac{2}{5}$; b) $x = -1\frac{1}{2}$; c) $x = 1,5$; d) $x = -2$.

4. Precizați coordonata x' , a punctului $P'(x')$ știind că punctele $P(x)$ și $P'(x')$ sunt:

a) simetrice față de origine iar $x = -3$;

b) simetrice față de origine iar $x = \frac{5}{3}$;

c) simetrice față de punctul $A\left(-\frac{3}{4}\right)$ și $x = 2$;

d) simetrice față de punctul $A(5,5)$ și $x = 7,35$.

Noțiuni de teorie și cărți

Aflăm: Este un procedeu pe care-l aplicăm în cazul în care numerele nu trebuie precizate cu exactitate. Astfel, se alege o valoare apropiată de numărul „*de aproximat*” care este relevantă și avantajoasă în contextul dat. Aproximarea se face prin lipsă sau prin adaos. Rotunjirea este aproximarea cea mai frecvent utilizată, prin care se optează pentru aproximarea prin lipsă sau prin ados în funcție de numărul cel mai mic de subunități la care trebuie să renunțăm sau cu care să completăm.

Să rezolvăm!

*

1. Aproximați prin lipsă cu cel mult o zecime numerele:

- a) $\frac{7}{25}$; b) 1,98; c) $\frac{5}{8}$; d) 0,217; e) 43,03.

2. Aproximați prin adaos cu cel mult o sutime numerele:

- a) $\frac{57}{40}$; b) $\frac{1598}{1000}$; c) 12,33; d) 0,449; e) 25,902.

3. Rotunjiți la unități următoarele numere raționale:

- a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{17}{5}$; c) 40,98; d) 10,2; e) 15,55.

**

4. Încadrați între două numere întregi consecutive, fiecare dintre următoarele numere raționale:

- a) $\frac{507}{32}$; b) $-\frac{63}{20}$; c) $\frac{58}{333}$; d) $-\frac{7}{12}$; e) $\frac{1043}{19}$.

- Observație:** Un număr rațional pozitiv este întotdeauna mai mare decât un număr rațional negativ.
- Reguli:**
1. Dintre două numere raționale negative, cel mai mare este cel care are modulul mai mic.
 2. Dintre două numere raționale pozitive cu același numitor este mai mare cel cu numărătorul mai mare.
 3. Dintre două numere raționale pozitive cu același numărător este mai mare cel cu numitorul mai mic.
 4. Dintre două numere raționale pozitive exprimate prin două fracții $\frac{a_1}{b_1}$ și $\frac{a_2}{b_2}$, atunci:
 - i) dacă $a_1 \cdot b_2 \leq a_2 \cdot b_1$, avem $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$; (analog pentru $<$);
 - ii) dacă $a_1 \cdot b_2 \geq a_2 \cdot b_1$, avem $\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2}$; (analog pentru $>$).

Să rezolvăm!

*

1. Comparați următoarele numere raționale:

a) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{5}$ cu $\frac{4}{5}$; $\frac{11}{8}$ cu $\frac{11}{16}$;

b) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{3}{10}$; $-\frac{3}{4}$ cu $-\frac{6}{5}$; $-\frac{3}{2}$ cu $\frac{6}{5}$;

c) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{2}{5}$; $-\frac{2}{3}$ cu $-\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$ cu $\frac{6}{5}$;

d) 0,(6) cu $\frac{1}{3}$; 1,(3) cu $\frac{5}{3}$; -0,(3) cu $-\frac{2}{3}$;

e) 0,25 cu 0,26; -0,17 cu -0,18; -1,(3) cu -1,34;

f) -0,2 cu $\frac{1}{5}$; -1,3 cu -1,(3); $-\frac{1}{3}$ cu -0,(3).

2. Scrieți trei numere raționale, cu două zecimale nenule, cuprinse între numerele:

a) 3,5 și 3,6;

b) -2,8 și -2,9;

c) $-\frac{7}{10}$ și $\frac{1}{10}$;

d) 7 și 7,3;

e) -1 și -0,9;

f) $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{5}$.

3. Dați patru exemple de numere raționale cuprinse între:

a) 2 și 3;

b) -3 și -4;

c) -1 și 1

d) $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{5}$;

e) 10 și 10,2;

f) $\frac{3}{8}$ și $\frac{7}{10}$.