Nicolae Sanda

Iuliana Chilom

Maria Sas

Matematică

- exerciții și probleme -

pentru clasa a VII-a

Booklet

CUPRINS

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor raționale

Capitolul II. Mulțimea numerelor reale

Capitolul III. Calcul algebric

Capitolul IV. Ecuații și inecuații

Capitolul V. Elemente de organizare a datelor

GEOMETRIE

Capitolul I. Patrulatere

Capitolul II. Asemănarea triunghiurilor

Capitolul III. Relații metrice în triunghiul dreptunghic

Capitolul IV. Cercul

Capitolul V. Noțiuni de trigonometrie

ALGEBRĂ

Capitolul I. Mulțimea numerelor raționale

1. Numere raționale

Noțiuni de teorie

Definiție: $\mathbb{Q} \underset{not}{=} \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$ se numește **mulțimea numerelor raționale**

Observația 1: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Observația 2: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Aflăm: Un număr rațional poate fi reprezentat atât prin fracție ordinară, cât și prin fracție zecimală *(finită sau periodică)*. Din fracția ordinară, prin împărțirea numărătorului la numitor, vom obține fracția zecimală. Pentru transformarea din forma zecimală în cea ordinară se procedează după cum urmează *(exemplificarea este pentru fracții zecimale pozitive subunitare, a_i, $b_i \in \mathbb{N}$, i, k, $m \in \mathbb{N}^*$):*

$$\overline{0, a_1a_2\ldots a_k} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{1\underbrace{00\ldots0}_{k}}, \quad \overline{0, (a_1a_2\ldots a_k)} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}}$$

$$\overline{0, a_1a_2\ldots a_k(b_1b_2\ldots b_m)} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_m} - \overline{a_1a_2\ldots a_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{m}\underbrace{00\ldots0}_{k}}$$

Să rezolvăm!

*

1. Dați câte trei exemple de reprezentanți (două fracții ordinare și o fracție zecimală) pentru fiecare dintre numerele raționale următoare:
a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{2}{5}$; c) $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{48}{100}$; e) $\frac{59}{44}$.

2. Dați cinci exemple de numere care să fie:
a) naturale; b) întregi, dar nu și naturale;
c) raționale pozitive; d) raționale, dar nu și întregi;
e) raționale negative; f) raționale subunitare.

* *

3. Să se scrie sub formă de fracție zecimală următoarele numere raționale:
a) $\frac{27}{10}, \frac{103}{10}, \frac{43}{100}, \frac{1097}{100}, \frac{4532}{1000}, \frac{73}{1000}$; b) $\frac{28}{5}, \frac{5}{8}, \frac{57}{40}, \frac{87}{25}, \frac{507}{32}, \frac{63}{20}$;
c) $\frac{5}{3}, \frac{11}{9}, \frac{83}{33}, \frac{7}{11}, \frac{58}{333}, \frac{1043}{999}$; d) $\frac{7}{12}, \frac{55}{18}, \frac{75}{22}, \frac{109}{132}, \frac{797}{792}, \frac{703}{825}$.

4. Să se scrie sub formă de fracție ordinară ireductibilă următoarele numere raționale:

a) 1,7; 2,45; 0,048; 15,2; 9,005; 0,485;

b) 0,(7); 0,(63); 0,(504); 24,(75); 5,(8); 2,(207);

c) 0,1(6); 0,42(7); 0,7(42); 6,43(8); 2,9(84); 1,36(141).

5. Să se scrie sub forma unei fracții zecimale numărul rațional:

a) $\frac{7}{4}$; b) $\frac{5}{16}$; c) $\frac{11}{75}$; d) $\frac{35}{9}$; e) $\frac{4}{7}$.

6. Să se afle a 2017-a cifră zecimală a numărului:

a) $\frac{7}{15}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{23}{28}$; d) $\frac{19}{18}$; e) $\frac{5}{21}$.

7. Să se afle suma primelor 50 cifre zecimale, ale numărului:

a) 3,12(35); b) 12,1(102); c) $\frac{2}{75}$; d) $\frac{1}{125}$; e) $\frac{5}{33}$.

8. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor.

a) $2,(35) \in \mathbb{Q}$ b) $1,2(05) \notin \mathbb{Q}$ c) $7,001(2) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

d) $9/2 \notin \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ e) $(-9)/3 \notin \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$ f) $-2,(7) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

2. Modulul și opusul unui număr rațional

Noțiuni de teorie

Notație: Valoarea absolută sau modulul unui număr rațional x se notează: $|x|$.

Definiție: Fie x și x_i din $\mathbb{Q}$, $x = \frac{a}{b}$ cu $b \neq 0$, $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ cu $b_i \neq 0$, $i = \overline{1,2}$ unde a, b, a_i și b_i sunt numere întregi.

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{sau } \textit{(mai restrâns)} \quad |x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

Proprietățile modulului

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $|x| = |-x|$;

3. $|x| = \max(-x, x)$;

4. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$;

5. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

6. $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$;

7. $|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|$;

8. $|x| \leq q$, $q \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow -q \leq x \leq q$.

Observație: Oricare număr rațional nenul x, are un **opus** notat $-x$, astfel încât suma lor este 0: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Să rezolvăm!

*

1. Pentru $x = 2\frac{2}{3}$, să se determine:

a) $|x-3|$; b) $x + \frac{5}{6}$; c) $x - 2\frac{2}{3}$; d) $|2-x|$; e) $\frac{2}{3} - x$.

2. Dați exemple de numere raționale, două pozitive și două negative, știind că modulul lor este:

a) mai mic decât 1;
b) mai mare decât 5;
c) mai mic decât $\frac{3}{7}$;
d) cuprins între 2 și 3;
e) cuprins între 3, 2(45) și 3,2(5);
f) mai mare decât $5\frac{6}{7}$.

* *

3. Știind că $x \in \left\{-1\frac{1}{2}; \frac{17}{5}; -5{,}3; 4{,}8\right\}$, precizați valoarea lui, dacă:

a) $|x| = -x$ și $x \geq -3$;
b) $|x| = x$ și $x \leq 4$;
c) $|x| = -x$ și $x \leq -2$;
d) $|x| = x$ și $x \geq 4$.

4. Se dă mulțimea $A = \left\{-15{,}2; -\frac{35}{4}; -\frac{20}{3}; -4{,}8; -2; -1{,}25; 3{,}8; \frac{23}{4}; \frac{49}{5}; \frac{109}{3}\right\}$.

Determinați numerele raționale a, în fiecare dintre situațiile următoare:

d) $a \in A$ și $|a| < 5$;
b) $a \in A$ și $|a| > 15$;
c) $a \in A$ și $|a| \leq 2$;
d) $a \in A$ și $3 < |a| < 10$.

5. Precizați opusul pentru fiecare dintre numerele de mai jos:

a) $-\frac{9}{5}$; b) 7,(3) ; c) $2\frac{2}{15}$; d) $-(-0{,}(5))$.

6. Se dă mulțimea $M = \left\{-12; -7\frac{2}{3}; -8{,}(2); -5; -\frac{4}{3}; -0{,}5; 0; \frac{1}{2}; 1{,}(3); \frac{74}{9}; 7{,}(3)\right\}$.

Să se determine elementele mulțimii

$Q = \{(x,y) \mid x$ și y sunt elemente din M, numere opuse$\}$.

7. Verificați dacă numerele x și y sunt numere opuse:

a) $x = (2{,}17+3{,}83)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$, $y = \left(3\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)\cdot 1\frac{1}{14}$;

b) $x = 4\cdot(17{,}375-9{,}125)\cdot\frac{1}{11}$, $y = [3{,}(15) - 2{,}(45)]\cdot\frac{11}{23}$;

c) $x = 3\frac{2}{5} - \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3} - 3\frac{2}{5}$;

d) $x = 5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{5}$, $y = 5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{5}$.

* * *

8. Se dă mulțimea $A = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \in D_6, b \in D_9\right\}$ și mulțimea

$B = \left\{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}^*, |x| \leq 4, |y| \leq 3\right\}$. Determinați:

a) $A \cap B$; b) $A \cap \mathbb{N}$; c) $B \cap \mathbb{Z}_-$; d) $B - \mathbb{Z}$.

3. Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor

Noțiuni de teorie

Aflăm: Oricărui număr rațional x îi corespunde pe axa numerelor un punct și numai unul. Acest punct se va afla la distanța $|x|$ față de originea axei și va fi în dreapta originii dacă numărul $x > 0$, respectiv în stânga dacă $x < 0$. Numărului zero îi corespunde chiar originea axei.

Să rezolvăm!

*

1. Să se reprezinte pe axa numerelor următoarele puncte:

a) $M\left(-\frac{5}{3}\right)$, $N\left(-\frac{1}{3}\right)$, $P\left(\frac{4}{3}\right)$ și $Q\left(2\frac{2}{3}\right)$;

b) $M\left(-\frac{7}{5}\right)$ $N\left(\frac{3}{5}\right)$, $P\left(\frac{9}{5}\right)$ și $Q\left(-\frac{2}{5}\right)$;

c) $M(-3{,}5)$, $N(2{,}5)$, $P(1{,}75)$ și $Q(-1{,}25)$.

* *

2. Fie x un număr rațional nenul, iar $-x$ opusul său.

a) dacă reprezentăm pe axa numerelor punctele $A(x)$ și $A'(-x)$, ce putem spune despre punctele A și A'?

b) să se reprezinte pe axa numerelor punctele $A(x)$ și $A'(-x)$ pentru:

i) $x = 3{,}2$; *ii)* $x = 2\frac{2}{3}$; *iii)* $x = -\frac{5}{8}$; *iv)* $x = 1{,}5$.

3. Fie x un număr rațional nenul. Să se reprezinte pe axa numerelor punctele $A(x)$, $B(-x)$, $C(x+1)$, $D(x-2)$, $E(2x)$ și $F(1-x)$ dacă:

a) $x = \frac{2}{5}$; b) $x = -1\frac{1}{2}$; c) $x = 1{,}5$; d) $x = -2$.

4. Precizați coordonata x', a punctului $P'(x')$ știind că punctele $P(x)$ și $P'(x')$ sunt:

a) simetrice față de origine iar $x = -3$;

b) simetrice față de origine iar $x = \frac{5}{3}$;

c) simetrice față de punctul $A\left(-\frac{3}{4}\right)$ și $x = 2$;

d) simetrice față de punctul $A(5{,}5)$ și $x = 7{,}35$.

4. Aproximarea numerelor raționale

Noțiuni de teorie

Aflăm: Este un procedeu pe care-l aplicăm în cazul în care numerele nu trebuie precizate cu exactitate. Astfel, se alege o valoare apropiată de numărul *„de aproximat"* care este relevantă și avantajoasă în contextul dat. Aproximarea se face prin lipsă sau prin adaos. Rotunjirea este aproximarea cea mai frecvent utilizată, prin care se optează pentru aproximarea prin lipsă sau prin ados în funcție de numărul cel mai mic de subunități la care trebuie să renunțăm sau cu care să completăm.

Să rezolvăm!

*

1. Aproximați prin lipsă cu cel mult o zecime numerele:

a) $\frac{7}{25}$; b) 1,98; c) $\frac{5}{8}$; d) 0,217; e) 43,03.

2. Aproximați prin adaos cu cel mult o sutime numerele:

a) $\frac{57}{40}$; b) $\frac{1598}{1000}$; c) 12,33; d) 0,449; e) 25,902.

3. Rotunjiți la unități următoarele numere raționale:

a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{17}{5}$; c) 40,98; d) 10,2; e)15,55.

* *

4. Încadrați între două numere întregi consecutive, fiecare dintre următoarele numere raționale:

a) $\frac{507}{32}$; b) $-\frac{63}{20}$; c) $\frac{58}{333}$; d) $-\frac{7}{12}$; e) $\frac{1043}{19}$.

5. Compararea și ordonarea numerelor raționale

Noțiuni de teorie

Observație: Un număr rațional pozitiv este întotdeauna mai mare decât un număr rațional negativ.

Reguli:

1. Dintre două numere raționale negative, cel mai mare este cel care are modulul mai mic.
2. Dintre două numere raționale pozitive cu același numitor este mai mare cel cu numărătorul mai mare.
3. Dintre două numere raționale pozitive cu același numărător este mai mare cel cu numitorul mai mic.
4. Dintre două numere raționale pozitive exprimate prin două fracții $\frac{a_1}{b_1}$ și $\frac{a_2}{b_2}$, atunci:

   i) dacă $a_1 \cdot b_2 \leq a_2 \cdot b_1$, avem $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$; (analog pentru <);

   ii) dacă $a_1 \cdot b_2 \geq a_2 \cdot b_1$, avem $\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2}$; (analog pentru >).

Să rezolvăm!

*

1. Comparați următoarele numere raționale:

a) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{5}$ cu $\frac{4}{5}$; $\frac{11}{8}$ cu $\frac{11}{16}$;

b) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{3}{10}$; $-\frac{3}{4}$ cu $-\frac{6}{5}$; $-\frac{3}{2}$ cu $\frac{6}{5}$;

c) $\frac{1}{3}$ cu $\frac{2}{5}$; $-\frac{2}{3}$ cu $-\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$ cu $\frac{6}{5}$;

d) $0,(6)$ cu $\frac{1}{3}$; $1,(3)$ cu $\frac{5}{3}$; $-0,(3)$ cu $-\frac{2}{3}$;

e) $0,25$ cu $0,26$; $-0,17$ cu $-0,18$; $-1,(3)$ cu $-1,34$;

f) $-0,2$ cu $\frac{1}{5}$; $-1,3$ cu $-1,(3)$; $-\frac{1}{3}$ cu $-0,(3)$.

2. Scrieți trei numere raționale, cu două zecimale nenule, cuprinse între numerele:

a) $3,5$ și $3,6$; b) $-2,8$ și $-2,9$; c) $-\frac{7}{10}$ și $\frac{1}{10}$;

d) 7 și $7,3$; e) -1 și $-0,9$; f) $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{5}$.

3. Dați patru exemple de numere raționale cuprinse între:

a) 2 și 3; b) -3 și -4; c) -1 și 1

d) $\frac{1}{4}$ și $\frac{4}{5}$; e) 10 și $10,2$; f) $\frac{3}{8}$ și $\frac{7}{10}$.