Marius PERIANU Florian DUMITREL

Matematică

clasa a IX-a

filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)
filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
filiera vocațională : profil militar (matematică-informatică)

CLUBUL MATEMATICIENILOR
CORESI

CUPRINS

CAPITOLUL 1

MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Tema 1.1

Numere raţionale şi iraţionale. Reprezentări zecimale

Notăm cu $\mathbb{N}$ mulțimea numerelor naturale și cu $\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,...\}$ și $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ $(a,c\in\mathbb{Z}, b,d\in\mathbb{Z}^*)$ se numesc *echivalente* dacă $ad=bc$; scriem $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește *număr rațional*. Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă. Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$. Așadar,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\;\middle|\; p,q\in\mathbb{Z},\, q\neq 0\right\}$$

Cu ajutorul algoritmului de împărțire a două numere naturale, orice fracție ordinară $\frac{p}{q}$ ($p\geq 0, q>0$) se poate scrie sub formă de fracție zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracție periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Dacă a este o *fracție periodică simplă*, adică are forma $a=a_0,(a_1a_2...a_p)$, unde $a_0\in\mathbb{N}$ și $a_1,a_2,...,a_p\in\{0,1,2,...,9\}$, atunci

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_p}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}}.$$

În cazul când a este *fracție periodică mixtă*, adică $a=a_0,a_1a_2...a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+p})$, avem

$$a=a_0+\frac{\overline{a_1a_2...a_{k+p}}-\overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{p\ ori}\underbrace{00...0}_{k\ ori}}.$$

$\mathbb{Q}$ este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada (0)).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu $a=0{,}1010010001...$. O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale obținem *mulțimea numerelor reale* pe care o notăm cu $\mathbb{R}$. Așadar, $\mathbb{R}$ este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

*

1. ***a)*** Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.

b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.

2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:

a) 5; ***b)*** $\frac{13}{8}$; ***c)*** $\frac{3}{4}$; ***d)*** $-\frac{3}{20}$; ***e)*** $\frac{14}{11}$;

f) $\frac{481}{125}$; ***g)*** $\frac{2}{3}$; ***h)*** $\frac{31}{13}$; ***i)*** $\frac{77}{75}$; ***j)*** $\frac{47}{66}$.

3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:
a) $5,(7)$; ***b)*** $-1,(13)$; ***c)*** $0,23(7)$; ***d)*** $-1,01(02)$; ***e)*** $-3,2(123)$.

4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca a^2 și a^3 să fie numere raționale?

5. ***a)*** Aflați a $100-a$ zecimală a numărului rațional $\frac{1}{13}$.

b) Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.

6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m,n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n)=1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.

7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.

8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\frac{p}{q}$ $(p,q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1)$ se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

**

9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001...$.

a) Arătați că a este număr irațional.

b) Aflați a $1000-a$ zecimală a numărului a.

c) Calculați suma primelor 1000 zecimale ale numărului a.

10. ***a)*** Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.

b) Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

11. Demonstrați afirmațiile:

a) dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

c) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

d) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2, k \in \mathbb{N}$; *b)* $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că există o infinitate de perechi (a,b) de numere iraționale cu $a+b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

14. Arătați că numărul $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este irațional.

15. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5^n+2}$; *b)* $\sqrt{7n+3}$; *c)* $\sqrt{n^2+5n+7}$; *d)* $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

16. Determinați numerele naturale k pentru care numărul $\sqrt{k^2+3k+14}$ este rațional.

17. Fie mulțimea $M = \left\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a^2-3b^2=1\right\}$. Arătați că:

a) $2+\sqrt{3} \in M$;
b) $x,y \in M \Rightarrow xy \in M$;
c) M este infinită.

18. *a)* Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m}+\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile (x,y) de numere naturale astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\sqrt{3}$.

19. Fie $a,b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a+b \in \mathbb{Q}$ și $m,n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Arătați că numerele $a-b$ și $ma+nb$ sunt iraționale.

***

20. Determinați $x,y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0,58(3)$.

21. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ este irațional.

22. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+21}$ este rațional.

Tema 1.2
Operaţii algebrice cu numere reale

Calculul cu numere reale se bazează pe proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor reale.

Adunarea este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale (x,y) i se asociază un număr real, notat cu $x+y$, numit *suma* numerelor x şi y.

Proprietăţile adunării

1. Adunarea este *asociativă*: $(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.
2. Adunarea este *comutativă*: $a+b=b+a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.
3. Numărul real 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, avem $a+0=0+a=a$.
4. Orice număr real a are un *opus*, adică există un număr real notat cu $-a$, astfel încât $a+(-a)=(-a)+a=0$.

Daca $x,y\in\mathbb{R}$, se notează $x-y=x+(-x)$ (*diferenţa* numerelor x şi y).

Înmulţirea este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale (x,y) i se asociază un număr real, notat cu $x\cdot y$ sau xy, numit *produsul* numerelor x şi y.

Proprietăţile înmulţirii

1. Înmulţirea este *asociativă*: $(ab)c=a(bc)$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.
2. Înmulţirea este *comutativă*: $ab=ba$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.
3. Numărul real 1 este *element neutru* pentru înmulţire, adică oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, avem $a\cdot 1=1\cdot a=a$.
4. Orice număr real $a\neq 0$ are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1}, astfel încât $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.
5. Înmulţirea este *distributivă faţă de adunare*, adică oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$, au loc egalităţile:

$$a(b+c)=ab+ac,\qquad (a+b)c=ac+bc.$$

Daca $x,y\in\mathbb{R}$ şi $y\neq 0$, se notează $\frac{x}{y}=xy^{-1}$ (*câtul* numerelor reale x şi y).

---

*

1. Calculaţi $(-1)^n\cdot 0{,}1(3)+(-1)^{n+1}\cdot 0{,}1+(-1)^{n+2}\cdot\frac{7}{6}+(-1)^{n+3}\cdot\frac{1}{5}$, unde $n\in\mathbb{N}$.
2. Calculaţi: *a)* $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{6}{\sqrt{3}}$; *b)* $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.
3. *a)* Dacă $\frac{3}{13}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculaţi $a_{2000}-a_{1000}$ şi $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$.

   b) Dacă $\frac{41}{333}=0,a_1a_2a_3\ldots$, calculaţi $a_5+a_{10}+a_{15}+\ldots+a_{100}$.

4. ***a)*** Calculați suma dintre opusul și inversul numărului $\sqrt{5}-2$.
b) Calculați suma inverselor următoarelor numere: $-1,\ \ 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:
a) opusul numărului $2x-3$ este 15;
b) inversul numărului $3x-2$ este 5;
c) numărul x^2-x este inversabil.

6. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:
a) $3-2\sqrt{2}$ și $3+2\sqrt{2}$; ***b)*** $\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

7. Se dau numerele: $a=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Calculați:
a) $a+b+c$; ***b)*** $a^2+b^2+c^2$; ***c)*** $ab+bc+ca$.

**

8. Calculați:
a) $2,(3)+7,(6)$; ***b)*** $0,(3)+0,0(3)+0,00(3)$;
c) $1,1(3)-2,07(27)$; ***d)*** $\frac{3}{5}-0,1(3)+\frac{1}{7}-0,(285714)$.

9. Calculați:
a) $5\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)-7\left(1-\frac{5}{6}+\frac{11}{12}\right)$;
b) $\frac{(1,5-0,25+5,8(3)):2,5}{0,(6)\cdot 3,(3)-0,25\cdot 2,1(6)}-\frac{1}{11}\cdot\left(1-1:\frac{3}{2}\right)$;
c) $1-\left\{\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{16}-7:(-24)\right]:\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\right\}\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)$.

10. Determinați numerele reale x din egalitatea: $\frac{1}{2}\cdot\left\{3-\frac{1}{2}\cdot\left[3-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-1\right)\right]\right\}=1$.

11. Calculați cu două zecimale exacte:
a) $\sqrt{3}$; ***b)*** $\sqrt{2,013}$; ***c)*** $\sqrt{5,71}$; ***d)*** $\frac{\sqrt{5}}{4}$; ***e)*** $\frac{\sqrt{39}}{3}$.

12. Calculați: $\dfrac{2,8+5\frac{1}{2}:\left(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2\frac{4}{5}$.

13. Se consideră numerele reale a, b, x, y astfel încât $a-b=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ și $x+y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.
Calculați $ax-by+ay-bx$.

14. Calculați:
a) $\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)$;
b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{3+\sqrt{3}}}$.

15. Arătați că:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{7+4\sqrt{3}}=4$.

16. Calculați:

a) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^{-2}\cdot(3,5+0,(6))$;

c) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

17. Arătați că $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}\in\mathbb{N}$.

***

18. Câturile obținute prin împărțirea numerelor $\dfrac{24}{11}$, $\dfrac{34}{13}$, $\dfrac{48}{7}$ la un număr rațional $r>0$ sunt numere întregi. Aflați cel mai mare număr rațional r cu această proprietate.

19. Fie $a,b\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculați $\dfrac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}$.

20. *a)* Arătați că $\dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma

$$S_n=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}},\ n\in\mathbb{N}^*$$

c) Determinați $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m=0,75$.