

Matematică

clasa a IX-a

- filiera teoretică: profil real (matematică-informatică, științe ale naturii)
- filiera tehnologică: toate profilurile (tehnic, servicii, resurse naturale)
- filiera vocațională : profil militar (matematică-informatică)



CUPRINS

ALGEBRĂ Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale

1.1. Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale	9
1.2. Operații algebrice cu numere reale	12
1.3. Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)	15
<i>Teste de evaluare</i>	20
1.4. Ordonarea numerelor reale	22
1.5. Inegalități algebrice (extindere)	25
1.6. Intervale de numere reale. Operații cu intervale	29
<i>Teste de evaluare</i>	32
1.7. Modulul unui număr real	33
1.8. Partea întregă și partea fracționară a unui număr real	36
1.9. Aproximări ale numerelor reale	39
<i>Teste de evaluare</i>	42
1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	43

ALGEBRĂ Capitolul 2. Elemente de logică matematică

2.1. Propoziție. Predicat. Operații logice elementare	51
2.2. Raționament prin reducere la absurd	57
2.3. Inducția matematică	59
<i>Teste de evaluare</i>	62
2.4. Mulțimi	63
2.5. Probleme de numărare	67
<i>Teste de evaluare</i>	70
2.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	71

ALGEBRĂ Capitolul 3. Șiruri de numere reale

3.1. Șiruri de numere reale. Șiruri monotone. Șiruri mărginite	77
3.2. Progresii aritmetice	80
3.3. Progresii geometrice	82
3.4. Probleme cu progresii aritmetice și geometrice	85
<i>Teste de evaluare</i>	89
3.5. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	91

ALGEBRĂ Capitolul 4. Funcții. Lecturi grafice

4.1. Funcții. Proprietăți generale. Lecturi grafice	97
4.2. Imaginea unei funcții. Preimagine. Funcții mărginite	101
4.3. Funcția de gradul I	105
4.4. Funcții pare. Funcții impare. Axe de simetrie. Centre de simetrie	108
4.5. Funcții monotone	111
4.6. Funcții periodice	114
4.7. Compunerea funcțiilor	117
<i>Teste de evaluare</i>	121
4.8. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	124

ALGEBRĂ Capitolul 5. Funcția de gradul al II-lea

5.1. Ecuația de gradul al doilea. Relațiile lui Viète	131
5.2. Definiția funcției de gradul al doilea. Reprezentarea grafică	135
5.3. Monotonia funcției de gradul al doilea	139
5.4. Semnul funcției de gradul al doilea	141
5.5. Sisteme cu ecuații de gradul al doilea	144
<i>Teste de evaluare</i>	149
5.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	152

GEOMETRIE Capitolul 6. Vectori în plan

6.1. Segment orientat. Relația de echipolență. Vectori	157
6.2. Adunarea vectorilor	160
6.3. Înmulțirea vectorilor cu scalari	162
6.4. Descompunerea unui vectori după doi vectori necoliniari	164
6.5. Reper cartezian în plan	167
<i>Teste de evaluare</i>	170

GEOMETRIE Capitolul 7. Concurență, coliniaritate, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană

7.1. Vectorul de poziție al unui punct. Teorema lui Thales.....	173
7.2. Centre de greutate. Relația lui Leibniz	177
7.3. Teorema bisectoarei. Vectorul de poziție al centrului cercului înscris ...	180
7.4. Ortocentrul unui triunghi. Relația lui Sylvester	183
7.5. Teorema lui Menelau. Probleme de coliniaritate	186
7.6. Teorema lui Ceva. Probleme de concurență	189
<i>Teste de evaluare</i>	192
7.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	194

GEOMETRIE Capitolul 8. Elemente de trigonometrie

8.1. Cercul trigonometric. Funcțiile sin și cos definite pe $[0, 2\pi]$	201
8.2. Funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg	205
8.3. Relații între funcțiile trigonometrice sin, cos, tg, ctg	210
8.4. Formule trigonometrice pentru sume și diferențe	214
8.5. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume	218
<i>Teste de evaluare</i>	222
8.6. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	223

Capitolul 1.1. Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

GEOMETRIE Capitolul 9. Aplicații ale trigonometriei

Capitolul 1.3. și ale produsului scalar în geometria plană

9.1. Produsul scalar a doi vectori	227
9.2. Aplicații ale produsului scalar în geometrie. Teorema cosinusului	230
9.3. Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Teorema sinusurilor. Rezolvarea triunghiurilor oarecare	233
9.4. Formule pentru aria triunghiului. Raza cercului înscris și raza cercului circumscris în triunghi	237
<i>Teste de evaluare</i>	239

Capitolul 1.7. Modulul unui număr real

SINTEZE Capitolul 10. Variante de subiecte pentru teză

10. Variante de subiecte pentru teză	243
--	-----

Capitolul 1.9. Aproximări ale numerelor reale

SOLUȚII	249
----------------------	-----

Capitolul 1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

Indice de autori	351
-------------------------------	-----

Bibliografie	352
---------------------------	-----

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Notăm cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu \mathbb{Z} mulțimea numerelor întregi, astfel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ și $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Tema 1.1. Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Tema 1.2. Operații algebrice cu numere reale

Tema 1.3. Formule de calcul prescurtat. Identități (extindere)

Teste de evaluare

Tema 1.4. Ordonarea numerelor reale

Tema 1.5. Inegalități algebrice (extindere)

Tema 1.6. Intervale de numere reale. Operații cu intervale

Teste de evaluare

Tema 1.7. Modulul unui număr real

Tema 1.8. Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real

Tema 1.9. Aproximări ale numerelor reale

Teste de evaluare

Tema 1.10. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

În cazul când a este fracție periodică simplă, adică $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n (a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p})$, avem

$$a = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_n \overbrace{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+p}}^{\text{perioadă}}}{10^{n+p} - 10^n}$$

\mathbb{Q} este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada (0)).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu $\pi = 0,101601001\dots$. O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale obținem mulțimea numerelor reale pe care o notăm cu \mathbb{R} . Astfel, \mathbb{R} este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tema 1.1

Numere raționale și iraționale. Reprezentări zecimale

Notăm cu \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale și cu \mathbb{Z} mulțimea numerelor întregi. Astfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ și $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Fracțiile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ ($a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Z}^*$) se numesc *echivalente* dacă $ad = bc$; scriem

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Mulțimea tuturor fracțiilor echivalente cu o fracție dată se numește *număr rațional*.

Pentru simplificarea exprimării, vom identifica un număr rațional cu oricare dintre fracțiile echivalente care îl reprezintă. Mulțimea numerelor raționale se notează cu \mathbb{Q} . Așadar,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Cu ajutorul algoritmului de împărțire a două numere naturale, orice fracție ordinară $\frac{p}{q}$ ($p \geq 0, q > 0$) se poate scrie sub formă de fracție zecimală periodică, cu perioada diferită de (9). Reciproc, orice fracție periodică, cu perioada diferită de (9), se poate scrie sub formă de fracție ordinară.

Dacă a este o *fracție periodică simplă*, adică are forma $a = a_0, (a_1 a_2 \dots a_p)$, unde $a_0 \in \mathbb{N}$ și $a_1, a_2, \dots, a_p \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, atunci

$$a = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_p}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}}}.$$

În cazul când a este *fracție periodică mixtă*, adică $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+p})$, avem

$$a = a_0 + \frac{a_1 a_2 \dots a_{k+p} - a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}} \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ ori}}}.$$

\mathbb{Q} este mulțimea tuturor fracțiilor periodice (fracțiile zecimale finite sunt considerate fracții periodice cu perioada (0)).

Există fracții zecimale infinite și neperiodice, de exemplu $a = 0,1010010001\dots$. O astfel de fracție zecimală se numește *număr irațional*.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale obținem *mulțimea numerelor reale* pe care o notăm cu \mathbb{R} . Așadar, \mathbb{R} este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale, periodice sau neperiodice. Notăm $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Au loc incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



1. a) Arătați că, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{2m+1}{3m+2}$ este ireductibilă.
 b) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{n+2}{3n+1}$ este reductibilă.
2. Scrieți ca fracție zecimală fiecare dintre numerele:
 a) 5; b) $\frac{13}{8}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $-\frac{3}{20}$; e) $\frac{14}{11}$;
 f) $\frac{481}{125}$; g) $-\frac{2}{3}$; h) $\frac{31}{13}$; i) $\frac{77}{75}$; j) $-\frac{47}{66}$.
3. Transformați în fracții ordinare următoarele fracții zecimale:
 a) 5,(7); b) $-1,(13)$; c) 0,23(7); d) $-1,01(02)$; e) $-3,2(123)$.
4. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Este posibil ca a^2 și a^3 să fie numere raționale?
5. a) Aflați a $100 - a$ zecimală a numărului rațional $\frac{1}{13}$.
 b) Arătați că există un multiplu de 13 format numai cu cifra 1.
6. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$. Arătați că, dacă $ma \in \mathbb{Z}$ și $na \in \mathbb{Z}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.
7. Arătați că, dacă o singură cifră din reprezentarea zecimală a unui număr real se repetă de o infinitate de ori, atunci numărul este rațional.
8. Arătați că un număr rațional pozitiv $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$) se reprezintă ca fracție zecimală finită dacă și numai dacă $q = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.



9. Se consideră numărul $a = 0,101001000100001\dots$.
 a) Arătați că a este număr irațional.
 b) Aflați a $1000 - a$ zecimală a numărului a .
 c) Calculați suma primelor 1000 zecimale ale numărului a .
10. a) Fie $x, y \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Arătați că $x + y \cdot a = 0$ dacă și numai dacă $x = y = 0$.
 b) Fie $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} = 0$ dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.
11. Demonstrați afirmațiile:
 a) dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $r + a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 b) dacă $r \in \mathbb{Q}^*$ și $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $ra \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 c) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $\frac{1}{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 d) dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

12. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că:

a) $\sqrt{n} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n = k^2, k \in \mathbb{N}$;

b) $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

13. Arătați că există o infinitate de perechi (a, b) de numere iraționale cu $a + b \in \mathbb{Q}$ și $a \cdot b \in \mathbb{Q}$.

14. Arătați că numărul $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$ este irațional.

15. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, următoarele numere sunt iraționale:

a) $\sqrt{5^n + 2}$; b) $\sqrt{7n + 3}$; c) $\sqrt{n^2 + 5n + 7}$; d) $\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

16. Determinați numerele naturale k pentru care numărul $\sqrt{k^2 + 3k + 14}$ este rațional.

17. Fie mulțimea $M = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 3b^2 = 1\}$. Arătați că:

a) $2 + \sqrt{3} \in M$;

b) $x, y \in M \Rightarrow xy \in M$;

c) M este infinită.

18. a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $\sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{m}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

b) Determinați perechile (x, y) de numere naturale astfel încât $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10\sqrt{3}$.

19. Fie $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a + b \in \mathbb{Q}$ și $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Arătați că numerele $a - b$ și $ma + nb$ sunt iraționale.



20. Determinați $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,58(3)$.

21. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ este irațional.

22. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+21}$ este rațional.

Tema 1.2

Operații algebrice cu numere reale

Calculul cu numere reale se bazează pe proprietățile adunării și înmulțirii numerelor reale.

Adunarea este operația prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x + y$, numit *suma* numerelor x și y .

Proprietățile adunării

1. Adunarea este *asociativă*: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Adunarea este *comutativă*: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Numărul real 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a + 0 = 0 + a = a$.
4. Orice număr real a are un *opus*, adică există un număr real notat cu $-a$, astfel încât $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Daca $x, y \in \mathbb{R}$, se notează $x - y = x + (-y)$ (*diferența* numerelor x și y).

Înmulțirea este operația prin care oricărei perechi de numere reale (x, y) i se asociază un număr real, notat cu $x \cdot y$ sau xy , numit *produsul* numerelor x și y .

Proprietățile înmulțirii

1. Înmulțirea este *asociativă*: $(ab)c = a(bc)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Înmulțirea este *comutativă*: $ab = ba$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Numărul real 1 este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
4. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1} , astfel încât $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.
5. Înmulțirea este *distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, au loc egalitățile:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Daca $x, y \in \mathbb{R}$ și $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ (*câtul* numerelor reale x și y).



1. Calculați $(-1)^n \cdot 0,1(3) + (-1)^{n+1} \cdot 0,1 + (-1)^{n+2} \cdot \frac{7}{6} + (-1)^{n+3} \cdot \frac{1}{5}$, unde $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculați:

a) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \frac{6}{\sqrt{3}}$;	b) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$.
---	--
3. a) Dacă $\frac{3}{13} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, calculați $a_{2000} - a_{1000}$ și $a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$.
 b) Dacă $\frac{41}{333} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, calculați $a_5 + a_{10} + a_{15} + \dots + a_{100}$.

4. a) Calculați suma dintre opusul și inversul numărului $\sqrt{5}-2$.

b) Calculați suma inverselor următoarelor numere: $-1, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$ în fiecare dintre cazurile:

a) opusul numărului $2x-3$ este 15;

b) inversul numărului $3x-2$ este 5;

c) numărul x^2-x este inversabil.

6. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

a) $3-2\sqrt{2}$ și $3+2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $\sqrt{10}-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

7. Se dau numerele: $a=2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, $b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, $c=5(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Calculați:

a) $a+b+c$;

b) $a^2+b^2+c^2$;

c) $ab+bc+ca$.



8. Calculați:

a) $2, (3)+7, (6)$;

b) $0, (3)+0, 0(3)+0, 00(3)$;

c) $1, 1(3)-2, 07(27)$;

d) $\frac{3}{5}-0, 1(3)+\frac{1}{7}-0, (285714)$.

9. Calculați:

a) $5\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)-7\left(1-\frac{5}{6}+\frac{11}{12}\right)$;

b) $\frac{(1,5-0,25+5,8(3)):2,5}{0,(6)\cdot 3,(3)-0,25\cdot 2,1(6)}-\frac{1}{11}\cdot\left(1-1:\frac{3}{2}\right)$;

c) $1-\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{16}-7:(-24)\right]:\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-5\frac{1}{3}\right)$.

10. Determinați numerele reale x din egalitatea: $\frac{1}{2}\cdot\left\{3-\frac{1}{2}\cdot\left[3-\frac{1}{2}\cdot(x^2-1)\right]\right\}=1$.

11. Calculați cu două zecimale exacte:

a) $\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{2,013}$;

c) $\sqrt{5,71}$;

d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$;

e) $\frac{\sqrt{39}}{3}$.

12. Calculați: $\frac{2,8+5\frac{1}{2}:(3+0,2\cdot 2\frac{1}{2})-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{\frac{63}{175}}}{\left(5\frac{3}{7}\cdot 4\frac{1}{5}+2,45:4\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}-\sqrt{1,5625}}:2\frac{4}{5}$.

13. Se consideră numerele reale a, b, x, y astfel încât $a-b=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ și $x+y=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.
Calculați $ax-by+ay-bx$.

14. Calculați:

a) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-5\sqrt{5})(\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{5})$;

b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}}$.

15. Arătați că:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 4$.

16. Calculați:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{5}\right)^{-1} + \left(\sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\right)^{-2} \cdot (3,5+0,(6))$;

c) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

17. Arătați că $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}} \in \mathbb{N}$.



18. Căturile obținute prin împărțirea numerelor $\frac{24}{11}$, $\frac{34}{13}$, $\frac{48}{7}$ la un număr rațional $r > 0$ sunt numere întregi. Aflați cel mai mare număr rațional r cu această proprietate.

19. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Calculați $\frac{a^2-ab+2b^2}{a^2+ab+3b^2}$.

20. a) Arătați că $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{1}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Determinați $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_m = 0,75$.