

Marginile unei mulțimi

1. Să se determine:

- i) $\inf\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$ și $\sup\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$;
- ii) $\inf\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\}$ și $\sup\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\}$;
- iii) $\inf\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $\sup\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Soluție.

i) Deoarece $0 \leq \frac{m}{1+m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulțimea $\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$, deducem că $x < \frac{1}{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{x} - 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\inf\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

Deoarece $\frac{m}{1+m+n} \leq 1$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulțimea $\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\}$, deducem că $\frac{n}{n+2} < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{2x}{1-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\sup\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\right\} = 1$.

ii) Deoarece $0 \leq \frac{m}{n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}, m < 2n$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulțimea $\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\}$, deducem că $x < \frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\inf\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\} = 0$.

Deoarece $\frac{m}{n} \leq 2$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}, m < 2n$, tragem concluzia că 2 este majorant pentru mulțimea $\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 2$ majorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\}$, deducem că $\frac{2n-1}{n} < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{2-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\sup\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\right\} = 2$.

iii) Deoarece $0 = \sqrt{1} - [\sqrt{1}] \leq \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este un minorant pentru mulțimea $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ care face parte din mulțime, deci

$$\inf\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = \min\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Deoarece $\sqrt{n} - [\sqrt{n}] < 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulțimea $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la

absurd, există $x < 1$ majorant al mulțimii $\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\sqrt{n^2 + 2n} - [\sqrt{n^2 + 2n}] < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{x^2}{2(1-x)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulțimea \mathbb{N} este mărginită, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar $\sup\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

2. Fie A, B două submulțimi mărginite ale lui \mathbb{R} cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel încât $a \leq b$. Să se arate că $\sup A \leq \sup B$.

Soluție. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\sup B < \sup A$. Atunci $\sup B$ nu este majorant pentru mulțimea A , deci există $a \in A$ astfel încât $\sup B < a$. Însă, conform ipotezei, există $b \in B$ având proprietatea că $a \leq b$, de unde obținem contradicția următoare: $b \leq \sup B < a \leq b$. Așadar $\sup A \leq \sup B$.

3. Să se arate că inegalitatea $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ este valabilă pentru orice $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, A mărginită.

Soluție. Deoarece $x \leq \sup A$ pentru orice $x \in A$ și $B \subseteq A$, deducem că $\sup A$ este majorant pentru B , deci, cum $\sup B$ este cel mai mic majorant al lui B , obținem că $\sup B \leq \sup A$.

Similar se arată că $\inf A \leq \inf B$.

4. Să se arate că dacă A și B sunt submulțimi mărginite ale lui \mathbb{R} , atunci $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Soluție. Conform exercițiului precedent $\sup A \leq \sup(A \cup B)$ și $\sup B \leq \sup(A \cup B)$, deci $\max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\max\{\sup A, \sup B\} < \sup(A \cup B)$. Atunci, cum $\sup(A \cup B)$ este cel mai mic majorant al lui $A \cup B$, deducem că $\max\{\sup A, \sup B\}$ nu este majorant al mulțimii $A \cup B$, deci există $x_0 \in A \cup B$ astfel încât $\max\{\sup A, \sup B\} < x_0$. Fără pierderea generalității, putem presupune că $x_0 \in A$, ceea ce conduce la următoarea contradicție: $x_0 \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\} < x_0$.

Așadar $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Similar se arată că $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B)$.

5. Pentru X și Y două mulțimi nevide și $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită, fie $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ și $f_2 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ date de $f_1(x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in Y\}$ pentru orice $x \in X$ și $f_2(y) = \sup\{f(x, y) \mid x \in X\}$ pentru orice $y \in Y$. Să se arate că

$$\sup\{f(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\} = \sup\{f_2(y) \mid y \in Y\},$$

i.e.

$$\sup_{x,y} f(x, y) = \sup_x \sup_y f(x, y) = \sup_y \sup_x f(x, y).$$

Soluție. Fie $S = \sup\{f(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. Deoarece $f(x, y) \leq S$ pentru orice $x \in X$ și orice $y \in Y$, deducem că $f_1(x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in Y\} \leq S$ pentru orice $x \in X$, de unde $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} \leq S$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < S$. Atunci, cum S este cel mai mic majorant al mulțimii $\{f(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, deducem că $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$ nu este majorant al acestei mulțimi, deci există $x_0 \in X$ și $y_0 \in Y$ astfel încât $\sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < f(x_0, y_0)$. Atunci obținem următoarea contradicție: $f(x_0, y_0) \leq \sup\{f(x_0, y) \mid y \in Y\} = f_1(x_0) \leq \sup\{f_1(x) \mid x \in X\} < f(x_0, y_0)$.

Așadar $\sup\{f(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

Similar se arată că $\sup\{f(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} = \sup\{f_2(y) \mid y \in Y\}$.

6. Pentru X și Y două mulțimi nevide și $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită, fie $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ și $g_2 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ date de $f_1(x) = \sup\{f(x, y) \mid y \in Y\}$ pentru orice $x \in X$ și $g_2(y) = \inf\{f(x, y) \mid x \in X\}$ pentru orice $y \in Y$. Să se arate că

$$\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\} \leq \inf\{f_1(x) \mid x \in X\},$$

i.e.

$$\sup_y \inf_x f(x, y) \leq \inf_x \sup_y f(x, y).$$

Să se arate că inegalitatea poate fi strictă.

Soluție. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\} < \sup\{g_2(y) \mid y \in Y\}$.

Atunci, cum $\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\}$ este cel mai mic majorant al mulțimii $\{g_2(y) \mid y \in Y\}$, deducem că $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$ nu este majorant al acestei mulțimi, deci există $y_0 \in Y$ astfel încât $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\} < g_2(y_0)$. Cum $\inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$ este cel mai mare minorant al mulțimii $\{f_1(x) \mid x \in X\}$, deducem că $g_2(y_0)$ nu este minorant al acestei mulțimi, deci există $x_0 \in X$ astfel încât $f_1(x_0) < g_2(y_0)$. Obținem astfel următoarea contradicție: $f(x_0, y_0) \leq f_1(x_0) = \sup\{f(x_0, y) \mid y \in Y\} < g_2(y_0) = \inf\{f(x, y_0) \mid x \in X\} \leq f(x_0, y_0)$.

Pentru a ne convinge că inegalitatea poate fi strictă, putem considera funcția $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$, unde X este o mulțime care are cel puțin două elemente, pentru care $\sup\{g_2(y) \mid y \in Y\} = 0 < 1 = \inf\{f_1(x) \mid x \in X\}$.

7. Să se arate că într-un corp ordonat (i.e. un corp comutativ K împreună cu o relație de ordine compatibilă cu structura algebrică a sa – mai precis astfel încât: i) pentru orice $x, y, z, t \in K$ cu proprietatea că $x \leq y$ și $t \geq 0$, rezultă că $x + z \leq y + z$ și $xt \leq yt$; ii) pentru orice $x \in K$ avem

$x \geq 0$ sau $x \leq 0$) arhimedeean (i.e. pentru orice $x, y \in K$, $y > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $x < ny$), Principiul intervalelor nevide închise incluse implică Axioma lui Cantor.

Soluție. Fie A o submulțime nevidă și majorată a lui K , b_1 un majorant al său și a_1 un element care nu este majorant al lui A (dacă A are un unic element x , alegem $a_1 = x - 1$; în caz contrar, există două elemente x și y din A , $x < y$ și alegem $a_1 = x$).

În continuare vom defini un interval $[a_2, b_2]$ inclus în $[a_1, b_1]$ astfel:

$$[a_2, b_2] = \begin{cases} [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}], & \frac{a_1+b_1}{2} \text{ este majorant al lui } A \\ [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1], & \frac{a_1+b_1}{2} \text{ nu este majorant al lui } A \end{cases}.$$

Inductiv vom obține un șir $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse astfel încât a_n nu este majorant al lui A , iar b_n este majorant al lui A , pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să observăm că lungimea intervalului $[a_n, b_n]$ (adică $b_n - a_n$) este lungimea lui $[a_1, b_1]$ (adică $b_1 - a_1$) înmulțită cu $\frac{1}{2^n}$. Cu alte cuvinte

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad (1)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Conform Principiului intervalelor nevide închise incluse, avem

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Vom arăta că $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ are un unic element.

Într-adevăr, dacă ar exista $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, $x < y$, atunci, având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_1 - a_1 < n_0(y - x)$. Cum $x, y \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, deducem că $y - x < b_{n_0} - a_{n_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0}$, deci $n_0(y - x) < b_1 - a_1$, ceea ce constituie o contradicție.

Așadar există $x \in K$ cu proprietatea că

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Afirmația 1. x este majorant al lui A .

Justificarea afirmației 1. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că x nu este majorant al lui A , atunci există $a \in A$ astfel încât $x < a$. Având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $b_1 - a_1 < n_0(a - x)$, de unde $b_{n_0} - x \leq b_{n_0} - a_{n_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} < a - x$, deci $b_{n_0} < a$, ceea ce contrazice faptul că b_{n_0} este majorant al lui A .

Afirmația 2. x este cel mai mic majorant al lui A .

Justificarea afirmației 2. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că x nu este cel mai mic majorant al lui A , atunci există $M \in K$ astfel încât $M < x$ și M este majorant al lui A . Având în vedere faptul că K este un corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $b_1 - a_1 < n_0(x - M)$, de unde $x - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} \stackrel{(1)}{=} \frac{b_1 - a_1}{2^{n_0 - 1}} \leq \frac{b_1 - a_1}{n_0} < x - M$, deci $M < a_{n_0}$. Prin urmare $u \leq M < a_{n_0}$ pentru orice $u \in A$, ceea ce conduce la contradicția că a_{n_0} este majorant al lui A .

Din cele două afirmații deducem că x este marginea superioară a mulțimii A .

Spațiul vectorial \mathbb{R}^n

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.

Soluție. Se verifică imediat că f este o normă.

Pentru $n = 2$, $x = (1, 0)$ și $y = (0, 1)$, avem $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, $\|x + y\|_1 = \|x - y\|_1 = 2$, deci identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.

Soluție. Se verifică imediat că f este o normă.

Pentru $n = 2$, $x = (1, 1)$ și $y = (1, 0)$, avem $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, $\|x + y\|_\infty = 2$ și $\|x - y\|_\infty = 1$, deci identitatea paralelogramului nu este satisfăcută.

3. Să se arate că există a și b numere reale strict pozitive astfel încât $a\|x\|_1 \leq \|x\| \leq b\|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Soluție. Conform inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz, avem

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2},$$

i.e. $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|$ și $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, i.e. $\|x\| \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci putem alege $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ și $b = 1$.

4. Să se arate că există a și b numere reale strict pozitive astfel încât $a\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b\|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Soluție. Avem $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq n \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$, i.e. $\frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty$ și $\max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, i.e. $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci putem alege $a = \frac{1}{n}$ și $b = 1$.

5. Este adevărat că $|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$? Dar că $|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$?

$$|x \cdot y| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \max\{|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|\} \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |y_i| \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

i.e. $|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Pe de altă parte, pentru $x = y = (1, 1, \dots, 1)$, avem $|x \cdot y| = n$ și $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, deci inegalitatea $|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ este falsă.

6. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ dacă și numai dacă există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$ sau $y = cx$?

Soluție. Avem

$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|x\| + \|y\| &\Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \Leftrightarrow x \cdot y = \|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

Dacă x și y sunt nenuli, atunci ultima egalitate are loc dacă și numai dacă există $c > 0$ astfel încât $x = cy$.

7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că $\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ dacă și numai dacă există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$ sau $y = cx$?

Soluție. Dacă există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$, atunci

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty = \|x + cx\|_\infty &= (1 + c)\|x\|_\infty = \|x\|_\infty + c\|x\|_\infty = \\ &= \|x\|_\infty + \|cx\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

Similar se arată că dacă există $c \geq 0$ astfel încât $y = cx$, atunci $\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Pentru $n = 2$, $x = (1, 0)$ și $y = (1, -1)$, avem $\|x + y\|_\infty = \|(2, 0)\|_\infty = 2 = 1 + 1 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, dar nu există $c \geq 0$ astfel încât $x = cy$ sau $y = cx$.

8. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ dacă și numai dacă $x \cdot y = 0$.

Soluție. Avem $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + x \cdot y + y \cdot x = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x \cdot y = 0$.

Analiza topologică a unei mulțimi

1. Pentru o submulțime A a lui \mathbb{R}^n , fie \overline{A} intersecția tuturor submulțimilor închise ale lui \mathbb{R}^n care conțin pe A . \overline{A} se numește închiderea (sau aderența) lui A și este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime închisă care conține pe A .

Să se arate că:

i) \overline{A} este o mulțime închisă.

ii) $A \subseteq \overline{A}$.

iii) A este închisă dacă și numai dacă $A = \overline{A}$.

iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

v) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \text{ pentru orice } r > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset, \text{ pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } x\}$.

vi) Dacă $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

vii) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

viii) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Este adevărat că dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

Soluție.

i) Deoarece \overline{A} este o intersecție de mulțimi închise, ea este o mulțime închisă.

ii) Este imediat că $A \subseteq \bigcap_{A \subseteq F, F \text{ închisă}} F = \overline{A}$.

iii) "⇒" Dacă mulțimea A este închisă, atunci $\bigcap_{A \subseteq F, F \text{ închisă}} F \subseteq A$, deci $\overline{A} \subseteq A$. Prin urmare $\overline{A} = A$.

"⇐" Dacă $\overline{A} = A$, cum \overline{A} este mulțime închisă, deducem că A este închisă.

iv) Decurge din i) și iii).

v) Vom demonstra incluziunea \subseteq .

Fie $x_0 \in \bigcap_{A \subseteq F, F \text{ închisă}} F$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_0 \notin \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset \text{ pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } x\}$. Atunci există $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât $V_0 \cap A = \emptyset$. Deoarece $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, există $r_0 > 0$ cu proprietatea că $B(x_0, r_0) \subseteq V_0$, deci $B(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$, i.e. $A \subseteq \mathbb{R}^n - B(x_0, r_0) \stackrel{\text{not}}{=} F_0$. Drept urmare, cum F_0 este închisă, obținem $x_0 \in \bigcap_{A \subseteq F, F \text{ închisă}} F \subseteq F_0$, i.e. $x_0 \in B(x_0, r_0)$, ceea ce constituie o contradicție.

Acum vom demonstra incluziunea \supseteq .

Fie $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset, \text{ pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } x\}$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x_0 \notin \bigcap_{A \subseteq F, F \text{ închisă}} F$. Atunci există F_0 mulțime închisă astfel încât $A \subseteq F_0$ și $x_0 \notin F_0$. Prin urmare

\mathbb{R} ȘI \mathbb{R}^n	9
Marginile unei mulțimi	9
Spațiul vectorial \mathbb{R}^n	13
ELEMENTE DE TOPOLOGIE	15
Analiza topologică a unei mulțimi	15
Conexitate	22
Compacitate	21
CONVERGENȚĂ	27
Definiția șirului convergent	27
Șiruri Cauchy	29
Subșiruri	31
Teorema convergenței monotone	33
Trecerea la limită în inegalități	37
Lema lui Stolz-Cesaro	41
Limita superioară și inferioară a unui șir de numere reale	48
Diverse	53
Șiruri de funcții	57
Definiția seriei convergente	63
Termenul general al unei serii convergente tinde la 0	63
Criteriul lui Cauchy pentru serii	64
Criterii de comparație	64
Criteriul de condensare al lui Cauchy	69
Criteriul raportului și criteriul radicalului	69
Criteriul Raabe-Duhamel	70
Criteriul lui Gauss	71
Criteriul Abel-Dirichlet și Criteriul lui Leibniz	72
Gruparea termenilor unei serii	73
Serii absolut convergente și serii semiconvergente	74
Diverse	76
CONTINUITATE	77
Caracterizarea continuității cu ajutorul șirurilor	77
Funcții cu proprietatea lui Darboux	81
Funcțiile continue au proprietatea lui Darboux	81
Teorema de permanență a conexității pentru funcții continue	84
Funcții uniform continue	85
Teorema de transport a continuității prin convergența uniformă	90

Teorema lui Dini	91
Definiția cu $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții	94
Definiția cu șiruri a limitei unei funcții	94
Funcții monotone	97
Diverse	98
DERIVABILITATE	101
Definiția funcției derivabile	101
Derivabilitatea inversei unei funcții	105
Teorema lui Fermat	107
Teorema lui Rolle	107
Teorema lui Lagrange	109
Consecințele Teoremei lui Lagrange	113
Teorema lui Darboux	115
Șiruri de funcții derivabile	116
Formula lui Taylor	118
Regula lui l'Hospital	123
DIFERENȚIABILITATE	125
Derivata după o direcție (vector) și derivatele parțiale	125
Funcții diferentiabile	126
Teorema de diferentiabilitate a funcțiilor compuse	130
Derivate parțiale de ordin superior	131
Formula lui Taylor-cazul multidimensional	133
Teorema de injectivitate locală	133
Teorema aplicației deschise	134
Teorema funcțiilor implicite	136
Teorema lui Fermat-cazul multidimensional	138
Puncte de extrem pentru funcții de mai multe variabile	138
Puncte de extrem cu legături	142
INTEGRABILITATE	144
Sume Riemann	144
Formula Leibniz-Newton	147
Sume Darboux	148
Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann	149
Lema de evaluare a modulului unei integrale Riemann-Stieltjes	152
Teorema de permutare a limitei cu integrala	155
Calculul unor integrale Riemann-Stieltjes	157
Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann	161
Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala Riemann	162

Teorema de medie	163
Teorema fundamentală a calculului integral	165
Formula lui Wallis	166
Funcții cu variație mărginită	167
Calculul unor integrale improprii cu ajutorul definiției	172
Funcțiile Beta și Gama	174
SERII DE FUNCȚII	177
Mulțimea de convergență a unei serii de funcții	177
Serii de puteri	179
BIBLIOGRAFIE	181