prof. dr. DANIEL STRETCU

Probleme de colorare

pentru pregătirea concursurilor de matematică

Cuvânt-înainte de conf. dr. ing. Alexandru Nicolae Tudosie

Ediția a II-a, revizuită

Editura Paralela 45

CUPRINS

ENUNȚURI

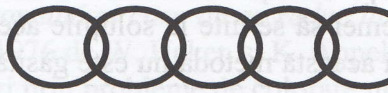
Capitolul 1

PROBLEME DE „ÎNCĂLZIRE”

1.1 Un elev are 3 culori: roșu, galben și albastru. Trebuie colorați un peștișor și o pasăre, fiecare cu o culoare diferită. Câte posibilități există?

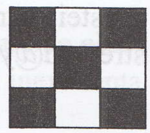
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

1.2 Câte lanțuri diferite pot fi realizate dacă 3 zale sunt roșii și 2 galbene?



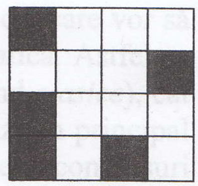
a) 6 b) 20 c) 7 d) 9 e) 10

1.3 Un elev colorează cu negru pătrățele de pe o tablă 3×3, ca în figură. Care este mărimea altei table în care elevul poate colora, în același mod, 9 pătrățele?



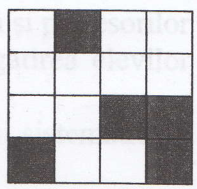
a) 3×3 b) 9×9 c) 5×5 d) 6×6 e) nu se poate colora

1.4 Care este numărul minim de pătrățele de colorat pentru ca pătratul mare din figura alăturată să aibă un centru de simetrie?



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 10

1.5 Care este numărul minim de pătrățele ce trebuie colorate, astfel încât pătratul mare din figura alăturată să aibă cel puțin o axă de simetrie?



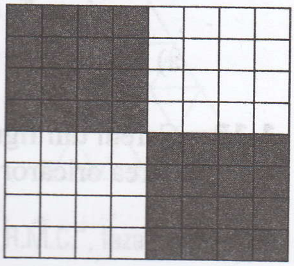
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 10

1.6 O tablă 5×5 este colorată folosind 5 culori, numerotate 1, 2, 3, 4, 5. Completaţi figura alăturată, astfel încât fiecare culoare să apară o singură dată în fiecare linie, coloană şi diagonală. Ce culoare este în centru?

2	3			4
1				
				3

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

1.7 O tablă 8×8 conţine 64 pătrăţele unitate colorate în alb şi negru ca în figura alăturată. Câte pătrate, compuse din pătrăţele unitate, au acelaşi număr de pătrate albe şi negre?



a) 5 b) 13 c) 25 d) 28 e) 32

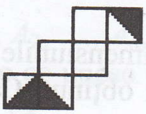
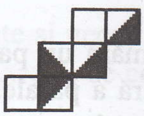
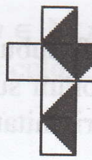
1.8 Otilia şi Cătălin construiesc un pătrat din pătrăţele 1×1 astfel: Otilia aşază un pătrăţel roşu în centru, Cătălin punând apoi 8 pătrăţele albastre în jurul acestuia, care formează un al doilea pătrat; Otilia pune 16 pătrăţele roşii în jurul acestora, formând al treilea pătrat ş.a.m.d. De câte pătrăţele roşii are nevoie Otilia pentru a completa cel de-al cincilea pătrat?

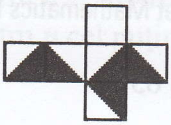
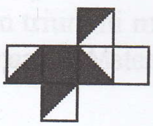
a) 64 b) 81 c) 36 d) 40 e) 32

1.9 Se vopseşte un cub cu latura de 10 cm şi se taie apoi în cubuleţe cu latura de 1 cm. Câte cubuleţe sunt vopsite exact pe două feţe?

a) 64 b) 96 c) 100 d) 104 e) 448

1.10 Din care din următoarele figuri desfăşurate se poate realiza un cub cu proprietatea că oricare două muchii care se suprapun au aceeaşi culoare?

a) 
b) 
c) 

d) 
e) 

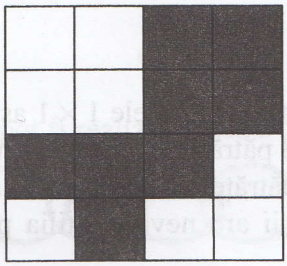
1.11 Un cub cu latura 4 este construit din cubuleţe de latură 1, cele din exterior fiind roşii şi cele din interior fiind albastre. Câte cuburi albastre sunt?

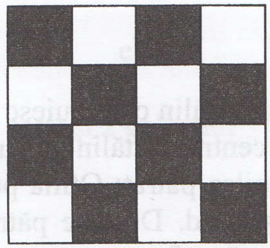
a) 16 b) 8 c) 4 d) 2 e) 1

1.12 Un cub cu latura 5 este format din cubuleţe albe şi negre, de latură 1, astfel încât vârfurile cubului mare sunt negre şi oricare două cubuleţe alăturate au culori diferite. Câte cubuleţe negre s-au utilizat?

a) 18 b) 26 c) 40 d) 62 e) 63

1.13 Careul din figura din stânga este colorat în alb şi negru. O mutare înseamnă interschimbarea oricăror două pătrăţele de pe aceeaşi linie sau aceeaşi coloană.





Care este numărul minim de mutări necesare pentru a obţine figura din partea dreaptă?

a) nu este posibil b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Concursul „Cangurul", 2006

1.14 Vrem să colorăm nişte cuburi identice astfel încât fiecare faţă a fiecărui cub să fie colorată cu o culoare, iar fiecare cub să fie colorat cu 6 culori diferite. Dacă avem 7 culori diferite din care să alegem, câte cuburi distincte putem obţine?

Purple Comet Mathematics Meet, SUA, 2004

a) 7 b) 210 c) 42 d) 720 e) 5040

1.15 Lipim 990 cuburi unitate şi formăm un paralelipiped cu dimensiunile $9 \times 10 \times 11$. Apoi colorăm suprafaţa exterioară a paralelipipedului astfel obţinut. Câte dintre cele 990 cuburi unitate iniţiale au fost colorate pe exact o faţă?

Purple Comet Mathematics Meet, SUA, 2005

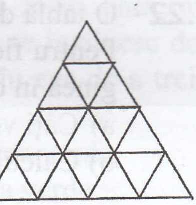
a) 382 b) 340 c) 398 d) 658 e) 982

1.16 Care este cel mai mic număr de fise circulare de diametru $\sqrt{2}$ care se pot aşeza pe o tablă de dimensiune 7×7, astfel încât în interiorul fiecărui pătrăţel unitate cel puţin un punct să fie acoperit cu o fisă?

O. Bogopolski, Olimpiadă regională, Rusia, 1995-1996

a) 5 b) 7 c) 10 d) 11 e) 9

1.17 În câte moduri pot fi colorate triunghiurile din figura alăturată cu roşu şi albastru astfel încât oricare 2 triunghiuri care au o latură comună să fie colorate diferit?



a) într-un singur mod; b) în două moduri;
c) în trei moduri; d) în mai mult de trei moduri;
e) nicio colorare nu e posibilă.

Concursul „Lider R.M.C.", faza finală, 1994

1.18 Fie 2009 cartonaşe, pe o faţă roşii şi pe o faţă albe, numerotate de la 1 la 2009. Ele sunt aranjate în ordine crescătoare cu faţa albă în sus.

Faza 1: se întorc toate cartonaşele cu faţa roşie în sus.

Faza 2: se întorc pe cealaltă faţă cartonaşele din 2 în 2, începând de la numărul 2 până la sfârşit.

...

Faza n: se întorc pe cealaltă faţă cartonaşele din n în n, începând de la numărul n până la sfârşit, $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2009\}$.

După toate aceste operaţiuni, câte cartonaşe sunt cu faţa roşie în sus?

Olimpiada de Matematică, jud. Neamţ, 2009

1.19 Într-un pătrat se colorează vârfurile, mijloacele laturilor şi centrul pătratului fie cu roşu, fie cu albastru. Arătaţi că există cel puţin două triunghiuri isoscele cu vârfurile în puncte colorate la fel.

prof. Radu Gologan, Concursul Interjudeţean „Clepsidra",
„Memorial Nicolae Pavelescu", 2009

1.20 Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n puncte distincte şi necoliniare din plan, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Toate segmentele ce unesc punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se colorează în două culori: roşu şi albastru. Arătaţi că:

a) pentru $n = 5$ există colorări fără triunghiuri monocolore;

b) pentru n cel puţin 6 există măcar un triunghi monocolor.

Concursul Interjudeţean de Matematică „Dimitrie Pompeiu", ediţia a IX-a, 2009