Gheorghe ANDREI

Constantin CARAGEA

PARTEA ÎNTREAGĂ [x]
PARTEA FRACŢIONARĂ {x}

VOLUMUL I

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

Editura Paralela 45

CUPRINS

		Enunțuri	Soluții
Prefață		7	
Introducere		9	
Capitolul I	Proprietăţi	11-30	
Capitolul II	Aplicaţii de bază	31-38	39-57
Capitolul III	Progresii în care intervin partea întreagă și partea fracționară	58-60	61-68
Capitolul IV	Aplicații ale identității lui Hermite	69-96	
Capitolul V	Partea întreagă și partea fracționară a unor expresii cu radicali	97-101	102-118
Capitolul VI	Egalități și identități	119-126	127-156
Capitolul VII	Mulțimi	157-161	162-181
Capitolul VIII	Ecuații	182-207	208-318
Capitolul IX	Ecuații cu parametri	319-329	330-386
Capitolul X	Ecuații cu mai multe necunoscute	387-389	390-400
Capitolul XI	Inecuații	401-403	404-417
Capitolul XII	Sisteme	418-428	429-449
Bibliografie		450	

capitolul 1 Proprietăţi

Definiția 1:

Numim partea întreagă a unui număr real x, cel mai mare număr întreg, mai mic decât x. Acest număr se notează cu $[x]$.

Prin urmare, oricare ar fi numărul real x, există o infinitate de numere întregi mai mici decât x. Din mulțimea acestora, alegem pe cel mai mare întreg, care evident depinde de x și se notează $[x]$.

În baza axiomei lui Arhimede putem enunța următoarea definiție.

Definiția 2:

Pentru orice număr real x, există un număr întreg m (unic determinat) astfel încât $m \leq x < m+1$. Numărul m se numește parte întreagă a lui x, adică $m = [x]$.

Avem $[x] = \begin{cases} m, & \text{pentru } m \leq x < m+1 \\ -m, & \text{pentru } -m \leq x < -m+1 \end{cases}, m \in \mathbb{N}$.

P$_1$. Toate numerele reale cuprinse între două numere întregi consecutive au aceeași parte întreagă: $[x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m+1)$, $(\forall)\ m \in \mathbb{Z}$.

P$_2$. Numerele $x, y \in \mathbb{R}$ aparțin aceluiași interval $[m, m+1)$ dacă și numai dacă $[x] = [y]$.

P$_3$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

a) $[x] \leq x < [x] + 1$;

b) $x - 1 < [x] \leq x$.

P$_4$. a) $x < 0 \Leftrightarrow [x] < 0$;

b) $x \geq 0 \Leftrightarrow [x] \geq 0$.

Definiția 3:

Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numărul $x - [x] = t \in [0,1)$ se numește partea fracționară a numărului real și se notează cu $\{x\}$.

Avem $x - [x] = \{x\} \Leftrightarrow x = [x] + \{x\}$.

Observație: Oricare ar fi expresia E, se pot scrie inegalitățile analoage lui **P$_3$**:

$$[E] \leq E < [E] + 1 \text{ și } E - 1 < [E] \leq E$$

și prin urmare $$E = [E] + \{E\}.$$

P$_5$. a) $[x] = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1)$;

b) $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;

c) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ (punctele fixe ale funcției $[\cdot]$);

d) $\{x\} = x \Leftrightarrow x \in [0,1)$ (punctele fixe ale funcției $\{\cdot\}$).

P_6. a) $\big[[x]\big] = [x], (\forall)\, x \in \mathbb{R}$;

b) $\big\{\{x\}\big\} = \{x\}, (\forall) x \in \mathbb{R}$;

c) $[\{x\}] = \{[x]\}, (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Proprietățile $\mathbf{P_5}$, $\mathbf{P_6}$ rezultă din definițiile părții întregi și părții fracționare.

P_7. Dacă $[a] = [b]$, atunci $|a - b| < 1$. Reciproca nu este adevărată.

<u>Soluție:</u> Dacă $[a] = [b] = m \Rightarrow a, b \in [m,m+1) \Rightarrow |a-b| < 1$ sau din
$[a] = [b] \Leftrightarrow a - \{a\} = b - \{b\} \Rightarrow a - b = \{a\} - \{b\} \in (-1,1) \Rightarrow$
$\Rightarrow |a-b| < 1$.

P_8. $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{a-b\} = 0$.

<u>Soluție:</u> Din $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a - [a] = b - [b] \Leftrightarrow a - b = [a] - [b] \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{a-b\} = 0$. De fapt dacă $a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a$ și b au aceeași parte fracționară.

P_9. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $[m+x] = m + [x]$.

<u>Demonstrație:</u> Din $[x] \le x < [x] + 1 \Rightarrow m + [x] \le x + m < m + [x] + 1$
deci $m + x$ este cuprins între doi întregi consecutivi, prin urmare

$$[m+x] = m + [x].$$

<u>Observație 1:</u>

Are loc și afirmația reciprocă: Dacă $[m+x] = m + [x]$, atunci $m \in \mathbb{Z}$.
Într-adevăr din $[m+x] = [m] + \{m\} + [x] \Rightarrow \{m\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{m\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

P_{10}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{Z}$ are loc egalitatea: $\{m+x\} = \{x\}$.

<u>Demonstrație</u>: Se utilizează egalitatea precedentă. Din
$[m+x] = m + [x] \Rightarrow m + x - \{m+x\} = m + x - \{x\} \Rightarrow \{m+x\} = \{x\}$.

<u>Observație:</u> Are loc și afirmația reciprocă: dacă $\{m+x\} = \{x\} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.
Din $\{[m] + \{m\} + x\} = \{x\} \Rightarrow \big\{\{m\} + x\big\} = \{x\} \Rightarrow \{m\} \in \mathbb{N} \Rightarrow \{m\} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

P_{11}. a) Funcția $[\cdot]: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ este crescătoare.

b) Funcția $\{x\}: \mathbb{R} \to [0,1)$ este periodică și strict crescătoare pe orice interval de forma $[m, m+1], m \in \mathbb{Z}$.

c) Dacă $f(x) = [x] \Rightarrow Imf = \mathbb{Z}$.

d) Dacă $g(x) = \{x\} \Rightarrow Img = [0,1)$.

Soluție: a) Fie $x < y \Rightarrow [x] \leq x < y < [y] + 1 \Rightarrow [x] < [y] + 1 \Rightarrow [x] \leq [y]$.

b) Calculăm $\{x + 1\} = \{x\}$ în baza lui P_{10} rezultă că $T = 1$ este perioada principală (dacă ar exista $0 < T_0 < 1$ perioada funcției, atunci $\{x + T_0\} = \{x\}$ $(\forall)x \in \mathbb{R}$ și, pentru $x = 0, \{T_0\} = 0$, $T_0 = 0$, fals).

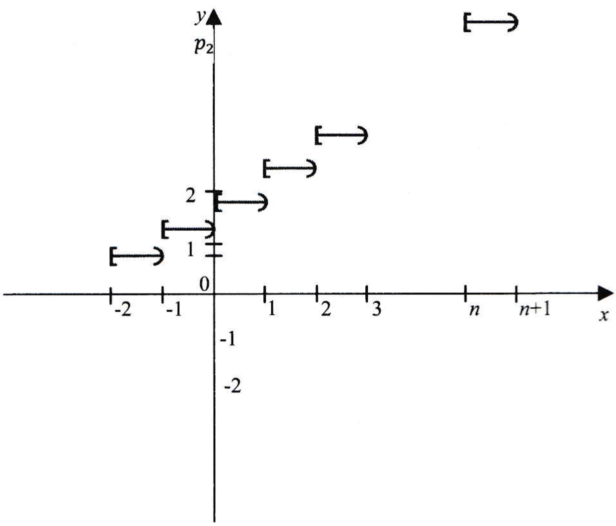
Pe intervalul $[0,1) \Rightarrow \{x\} = x$ care este strict crescătoare și fiind periodică rezultă că $\{x\}$ este strict crescătoare pe orice interval $[m,m + 1)$ cu $m \in \mathbb{Z}$.

c) Evident $[x] \in \mathbb{Z}$.

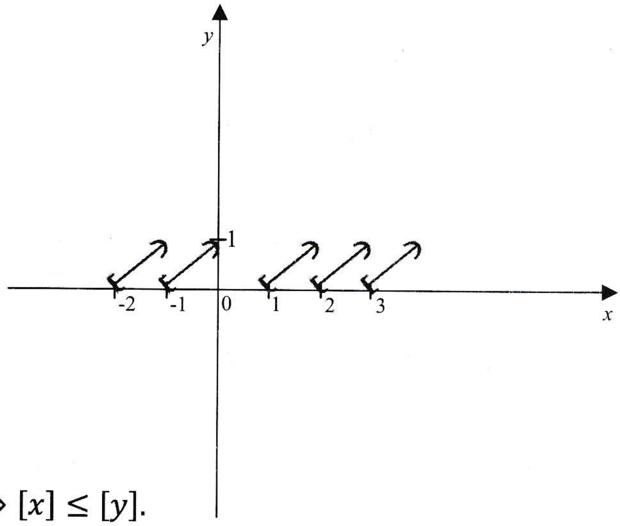
d) $\{x\} \in [0,1)$.

P_{12}. Graficul funcției $[x]$ este format din segmente orizontale închise la stânga deschise la dreapta, paralele cu axa OX (un grafic în „trepte”)

$$[x] = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots \\ -2, & x \in [-2,-1) \\ -1, & x \in [-1,\ 0) \\ 0, & x \in [\ 0,\ 1) \\ 1, & x \in [\ 1,\ 2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ n, & x \in [n,n + 1) \end{cases}.$$



P_{13}. $\{x + m\} = \{x\}$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$ și $0 \leq \{x\} < 1$, graficul următor:



P_{14}. a) Dacă $x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

b) Dacă $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

c) $[x] < [y] \Rightarrow x < y$.

d) Dacă $x, y \in [m, m+1)$ și $x \neq y \Rightarrow [x] = [y]$ și $\{x\} \neq \{y\}$.

P_{15}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ au loc relațiile:

a) $[-x] = \begin{cases} -[x], & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

b) $[-x] + [x] = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $[-x] \leq -[x]$;

d) $[-x] \leq -x \leq -[x]$.

<u>Soluție:</u>

a) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ rezultă că $[-x] = -[x]$.

Dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow x = [x] + \alpha, \alpha(0,1) \Rightarrow -x = -[x] - \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow [-x] = [-[x] - \alpha] = -[x] + [-\alpha] = -[x] - 1.$$

b) Rezultă din a).

c) Din punctul a) rezultă $[-x] = -[x]$ sau $[-x] = -[x] - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [-x] \leq -[x].$$

d) Din definiția părții întregi avem:

$$[x] \leq x \Rightarrow -x \leq -[x] \text{ și deci } [-x] \leq -x \leq -[x].$$

P_{16}. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

a) $\{-x\} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ 1 - \{x\}, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

b) $\{-x\} + \{x\} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$;

c) $\{1 - \{x\}\} = 1 - \{x\}, (\forall) x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Soluție: Se utilizează $\mathbf{P_{15}}$.

a) Dacă $x \in \mathbb{Z}$, evident. Fie $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow -x = [-x] + \{-x\} \Rightarrow$
$$\Rightarrow \{-x\} = -x - [-x] = -x - (-[x] - 1) = 1 - \{x\}.$$

b) și c) rezultă din punctul a).

$\mathbf{P_{17}}$. Fie $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se arate că $[x + a] = [x], (\forall)x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = 0$.

b) Să se arate că $\{x + a\} = \{x\} + a, (\forall)x \in \mathbb{R}$, dacă și numai dacă $a = 0$.

Soluție:

a) Presupunem că $a \neq 0$. Pentru $x = 0 \Rightarrow [a] = 0 \Rightarrow a \in (0,1)$ și pentru $x = 1 - a \Rightarrow [1 - a] = [1 - a + a] \Rightarrow 0 = 1$, fals. Prin urmare, $a = 0$.

b) Presupunem că $a \neq 0$, atunci pentru $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \{a\} = a \Rightarrow a \in \in (0,1)$, iar pentru $x = 1 - a$, rezultă $0 = 1$, fals. Prin urmare, $a = 0$.

$\mathbf{P_{18}}$. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că:

a) $[x + a] = [x + b], (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b$;

b) $[xa] = [xb], (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = b$.

Demonstrație:

În ambele cazuri o implicație este evidentă.

a) Fie $[x + a] = [x + b], (\forall)x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = -a \Rightarrow [b - a] = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow b \geq a$ pentru $x = -b \Rightarrow [a - b] = 0 \Rightarrow a \geq b$ deci $a = b$.

b) Presupunem prin absurd că $a \neq b$, atunci din: $[ax] = [xb] \Rightarrow$ $\Rightarrow |xa - xb| < 1 \Rightarrow [x] < \dfrac{1}{|a - b|}, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, fals. Prin urmare, $a = b$.

$\mathbf{P_{19}}$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ au loc inegalitățile:

a) $[nx] \geq n[x]$;

b) $[x] \leq \dfrac{[nx]}{n}$;

c) $n[-x] \leq [-nx] \leq -n[x]$;

d) $[mx] = \begin{cases} m[x], & (\forall)\ m \in \mathbb{Z}_+ \\ \leq m[x], & (\forall)\ m \in \mathbb{Z}_- \end{cases}$.

Soluție:

a) Din $[x] \leq x \Rightarrow n[x] \leq nx \Rightarrow n[x] \leq [nx]$.

b) Rezultă din punctul a) sau din:
$$[x] = \left[\frac{nx}{n}\right] = \left[\frac{[nx]}{n}\right] \leq \frac{[nx]}{n}. \left(\text{S-a utilizat } \left[\frac{x}{n}\right] \equiv \left[\frac{[x]}{n}\right]\right).$$

c) Avem $[-x] \leq -x \Rightarrow n[-x] \leq -nx \Rightarrow n[-x] \leq [-nx] \leq -n[x]$.
(S-au utilizat punctul a) și $[-x] \leq -x$.)

d) Din a) și c) rezultă d).