Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)

Marin Chirciu
Daniel Jinga
Vasile Gorgota
Octavian Stroe
Sorin Ulmeanu

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a IX-a

(2011-2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

Partea a II-a. GEOMETRIE

PARTEA I

ALGEBRĂ

Capitolul I.1.
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1.1. NUMERE NATURALE. NUMERE ÎNTREGI. ECUAȚII. ECUAȚII DIOFANTICE

1. Determinați cel mai mic număr natural n care se divide cu 28, are suma cifrelor 28 și are ultimele două cifre 28.

(S:L11.2.aprilie)

2. Matei și Irina, elevi în clasa a IX-a, studiază la școală 15 discipline. La sfârșitul semestrului I obțin aceeași medie generală. Știind că au avut numai medii de 8, 9 și 10, iar că numărul mediilor de 8 ale lui Matei este, respectiv, egal cu numărul mediilor de 8, 9 și 10 ale Irinei, precizați câte medii de 10 a obținut Irina.

(S:L11.4.aprilie)

3. Dintr-o revistă lipsește o singură foaie. Dacă însumăm numerele reprezentând paginația de pe restul de pagini obținem 199. Putem afla numărul total de pagini și numărul paginii lipsă?

(S:L11.6.aprilie)

4. Trei numere naturale nenule a, b, c se numesc pseudopitagorice dacă:

$$a^{-2} = b^{-2} + c^{-2}.$$

Există 2011 astfel de triplete?

(S:L11.5.mai)

5. Demonstrați că din 7 numere întregi se pot alege patru cu suma divizibilă cu 4. Rămâne adevărat rezultatul pentru 6 numere întregi?

(S:L11.1.iunie)

6. Arătați că $a^2 + b^2 + ab$ este pătrat perfect pentru cel puțin 2011 perechi de numere naturale (a, b).

(S:L11.4.iunie)

7. Demonstrați că există pătrate perfecte cu 2011 cifre din care 3 sunt 0, dar ultima cifră este nenulă.

(S:L11.7.iunie)

8. Fie $a = 2011! + 2010! + \ldots + 3! + 2!$ și $\overline{a_1a_2 \ldots a_p}$ reprezentarea lui a în baza 10. Dacă $s = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \overline{a_5a_6} + \ldots$ (ultimul termen fiind format din una sau două cifre), arătați că a și s nu sunt pătrate perfecte.

(S:L11.9.iunie)

9. Există numere naturale, care scrise în baza 10, au n cifre și scrise în baza 2 au $2n$ cifre? Justificați răspunsul.

(S:L11.10.iunie)

10. Arătați că există numere naturale nenule n, pentru care numărul $\sqrt{n+1} + \sqrt{8n+1}$ este număr natural.

(S:L11.2.octombrie)

11. Demonstrați că există intervale $[a, b]$ cu $b - a > 2011$ care conțin doar numere întregi compuse.

(S:L11.8.octombrie)

12. Dați un exemplu de 6 numere prime care sunt în progresie aritmetică.

(S:L11.8.noiembrie)

13. Este adevărată afirmația: *Produsul a două numere care se pot scrie ca suma a două numere naturale pătrate perfecte este un număr care se poate scrie ca suma a două numere naturale pătrate perfecte?* (Considerați o identitate algebrică.)

(S:L12.4.ianuarie)

14. În expresia $S = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \ldots \pm \frac{1}{2012}$, se poate găsi o alegere de semne astfel încât S să fie număr întreg?

(S:L12.7.ianuarie)

15. Există un număr natural a cu 2012 cifre, toate nenule, astfel încât a se divide cu suma cifrelor sale?

(S:L12.8.ianuarie)

16. Există oare un număr cu 2012 cifre, format numai cu cifrele 1 sau 2, care se divide la 2^{2012}?

(S:L12.7.februarie)

17. Enumerați toate triunghiurile cu lungimile laturilor numere naturale și pentru care $p = 6r$, unde p este semiperimetrul triunghiului și r este raza cercului înscris în triunghi.

(S:L12.6.martie)

18. Arătați că, folosind monede de 5 lei și de 3 lei, se poate plăti orice sumă număr întreg de lei mai mare sau egală cu 8.

(S:L12.7.martie)

19. Fie m și n două numere întregi. Știind că ecuația: $x^2 - (m+n)x + mn + 2012 = 0$ are ambele soluții numere întregi, aflați toate valorile posibile pe care le poate lua $|m-n|$.

Ramona Tudoran, Arad **(S:L12.1.aprilie)**

20. Se dă un pătrat perfect cu cifra unităților 9 și cifra zecilor 0. Arătați că cifra sutelor este pară. Determinați cele mai mici două pătrate perfecte care se termină cu cifrele $\overline{209}$.

(S:L12.9.aprilie)

21. Există numere naturale nenule n astfel încât, pentru orice număr prim p pentru care $p-1$ divide n, p divide n?

(S:L12.8.septembrie)

22. Găsiți numerele naturale n pentru care $\frac{n(n+1)}{2} = \overline{33\ldots3}$.

(S:L12.10.septembrie)

23. Determinați numerele întregi z pentru care numărul $z^3 + 2z^2 + 3z + 2$ este întreg.

Alin Munteanu, Sibiu **(S:L12.1.decembrie)**

24. Fie $b = 2c$, $c \in \mathbb{N}^*$, o bază de numerație. Arătați că:

$$x = \overline{\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_{n \text{ ori}}}^{\,2}_{(b)} + \overline{(c-1)\underbrace{(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_{n-1 \text{ ori}}\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ ori}}}^{\,2}_{(b)}$$

este pătrat perfect.

Mugur Acu, Sibiu **(S:L12.9.decembrie)**

25. Arătați că $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$ nu poate fi pătrat perfect pentru nicio valoare $n \in \mathbb{N}^*$.

(S:L13.3)

26. Pot fi trei cuburi perfecte în progresie aritmetică?

(S:L13.4)

27. Demonstrați că nu există patru numere consecutive, mai mari decât 10, care să aibă toți factorii primi de o singură cifră.

Traian Preda, București **(S:L13.7)**

28. Există numere naturale n nenule, pentru care $n^2 + 18n$ este pătrat perfect?

(S:L13.47)

29. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care există numerele naturale x, y, astfel încât $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{n^2}$.

(S:L13.48)

30. Aflați toate numerele naturale nenule care pot fi scrise ca suma a cel puțin două numere naturale consecutive.

(S:L13.49)

31. Care este cel mai mic număr natural n pentru care ultimele trei cifre ale numărului 2013^n sunt aceleași?

(S:L13.50)

32. Fie p, q numere prime distincte și a număr natural ce nu se divide cu pq, astfel încât pq divide numerele $a^{p-1}-1$ și $a^{q-1}-1$. Arătați că pq divide $a^{pq-1}-1$.

George Stoica, Canada **(S:L13.85)**

33. Poate fi numărul $2^n + 3^n$ pătrat perfect pentru vreo valoare $n \in \mathbb{N}$?

(S:L13.87)

34. Găsiți 13 numere consecutive neprime cu 2310. Arătați că, date fiind 14 numere consecutive, cel puțin unul este neprim cu 2310.

(S:L13.88)

35. Aflați ultimele trei cifre ale numărului $19^{70} - 18^{70}$.

Cristina Ștefan, București **(S:L13.90)**

36. Se consideră numerele întregi a, b, c astfel încât $ab + bc + ca \neq 0$ și $a^2 + b^2 + c^2$ este pătrat perfect. Arătați că există $m, n \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

Lucian Petrescu, Tulcea **(S:L13.165)**

37. Există numere naturale a_n, $n=\overline{1,2013}$, astfel încât numerele a_1a_2, a_2a_3, ..., $a_{2012}a_{2013}$, $a_{2013}a_1$ (în această ordine) să formeze o progresie aritmetică neconstantă? Ce se întâmplă dacă înlocuim 2013 cu 2012?

(S:L13.170)

38. În câte moduri poate fi scris numărul 2014 ca suma unor numere naturale consecutive?

(S:L13.203)

39. Rezolvați în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația $x^2(1-y) + y^2(1-x) = x + y$.

Liliana Tomiță, Botoşani **(S:L13.243)**

40. Considerăm zece numere naturale nenule cu suma 2013.

a) Dacă a şi b sunt două dintre ele, oarecare, arătați că $ab < (a-1)(b+1)$ dacă şi numai dacă $a - b \geq 2$.

b) Care este valoarea maximă a produsului celor zece numere?

(S:L13.248)

41. Găsiți toate numerele prime p pentru care numărul $p^2 + 23$ are exact 6 divizori.

Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti **(S:L13.284)**

42. a) Se consideră ecuația $x^2 + y^2 = 6z^2$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Arătați că, dacă (x, y, z) este o soluție a ecuației, atunci x şi y sunt divizibile cu 3 şi apoi demonstrați că $(0, 0, 0)$ este singura soluție a ecuației.

b) Determinați $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, dacă $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$.

c) Arătați că, dacă $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ este o soluție pentru $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$, atunci $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sau $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dan Negulescu, Brăila **(S:L13.328)**

43. Pentru ce valori naturale n numărul $n(n+1)(n+2)(n+3) + 2014$ este pătrat perfect?

(S:L14.5)

44. Fie n un număr natural dat. Determinați numerele naturale x, y cu suma minimă pentru care $3^n + x^2 = y^2$.

(S:L14.10)

45. Determinați cel mai mic număr natural n pentru care există exact 24 de numere pătrate perfecte mai mari sau egale cu n şi mai mici sau egale cu $n + 2014$.

Olimpiadă Japonia **(S:L14.88)**

46. Arătați că numărul $A = 3\underbrace{9999...9}_{2014 \text{ cifre}}76\underbrace{0000...0}_{2014 \text{ cifre}}56$ se poate scrie ca suma pătratelor a patru numere naturale pare consecutive.

Marin Ionescu, Piteşti şi *Marian Teler*, Costeşti **(S:L14.243)**

47. Determinați numerele întregi x, y, z, t care satisfac $\begin{cases} x + y + z = t^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^3 \end{cases}$

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu, Caraş-Severin **(S:L14.326)**

48. Găsiți soluțiile întregi ale ecuației $x^3 + 7 = 9y(y+2)$.

Ionuț Grigore, elev, Timişoara **(S:L15.3)**

49. Arătați că ecuația $x^2 + xy = y^2 + xz$ are o infinitate de soluții întregi x, y, z care verifică $z + 1 = x + y$.

Mihaly Bencze, Bucureşti **(S:L15.4)**

50. Determinați numerele întregi x, y şi z pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 2015yz$.

Lucian Tuțescu, Craiova **(S:L15.41)**

51. Determinați numerele prime p şi q astfel încât $\dfrac{(p-1)!+1}{p} = q^6 + 39$.

Cristian Moanță şi *Lucian Tuțescu*, Craiova **(S:L15.47)**

INDICAŢII ŞI SOLUŢII

PARTEA I. ALGEBRĂ

CAPITOLUL I.1. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

I.1.1. NUMERE NATURALE. NUMERE ÎNTREGI. ECUAŢII. ECUAŢII DIOFANTICE

1. (S:L11.2.aprilie) Numărul 18928 probează condiţiile problemei.

2. (S:L11.4.aprilie) Fie x = numărul mediilor de 8 ale lui Matei. Rezultă că x = numărul mediilor de 8 ale Irinei = numărul mediilor de 9 ale Irinei = numărul mediilor de 10 ale Irinei. Din $x + x + x = 15$ deducem că $x = 5$. Deci Irina are 5 medii de 10.

3. (S:L11.6.aprilie) Fie n numărul de pagini ale revistei, iar x şi $x + 1$ numărul paginilor foii lipsă. Avem $1 + 2 + 3 + \ldots + n - x - (x + 1) = 199$. Deducem $\frac{n(n+1)}{2} = 200 + 2x \Leftrightarrow n(n + 1) = 400 + 4x$. Deducem $n = 20$ şi $x = 5$. Rezultă că revista are 20 de pagini şi lipseşte foaia cu paginile 5 şi 6.

4. (S:L11.5.mai) Fie x, y, z trei numere naturale nenule pitagorice, adică $x^2 = y^2 + z^2$; Există o infinitate de triplete pitagorice: $x = 2k^2 + 2k + 1$, $y = 2k + 1$, $z = 2k^2 + 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Luăm $a = yz$, $b = xy$, $c = xz$ şi obţinem $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Deducem că există o infinitate de numere naturale nenule a, b, c pseudopitagorice; $a = (2k + 1)(2k^2 + 2k)$, $b = (2k^2 + 2k + 1)(2k + 1)$, $c = (2k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 2k)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

5. (S:L11.1.iunie) Împărţim cele 7 numere întregi în 4 grupe în funcţie de restul împărţirii la 4. R_k: mulţimea elementelor care împărţite la 4 dau restul k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (adică $x \in R_k \Leftrightarrow x \equiv k \pmod 4$). Avem cazurile: • Există o calsă de resturi cu cel puţin 4 elemente. Dacă avem card $R_k \geq 4$, putem alege $a, b, c, d \in R_k$ şi evident $S = a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. • card $R_k \leq 3$, $\forall\ k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Deoarece $a + b + c + d \equiv (a + x) + (b + x) + (c + x) + (d + x) \pmod 4$. Conform principiului lui Dirichlet există $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ astfel încât card $R_k \geq 2$ de unde card $R_k \in \{2, 3\}$. Modificând cele 7 numere adunând pe fiecare număr cu $x = 4 - k$, putem considera $k = 0$, adică avem card $R_0 \in \{2, 3\}$. • Dacă $R_1 \neq \varnothing$ şi $R_3 \neq \varnothing$ putem alege $a, b \in R_0$ şi $c \in R_1$, $d \in R_3$ şi avem $a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. • Dacă $R_3 = \varnothing$, avem card $(R_1 \cup R_2) \geq 4$, rezultă $R_1 \neq \varnothing$, $R_2 \neq \varnothing$. În cazul card $R_2 \geq 2$, alegem $a, b \in R_0$ şi $c, d \in R_2$ şi rezultă $S = a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. În cazul card $R_2 = 1$ rezultă card $R_1 \geq 2$, alegem $a \in R_0$, $b, c \in R_1$ şi $d \in R_2$ şi rezultă $S = a + b + c + d \equiv 0 \pmod 4$. Analog procedăm şi în cazul $R_1 = \varnothing$. Proprietatea nu rămâne adevărată în cazul a 6 numere întregi, cum reiese din exemplul $\{4, 5, 8, 9, 12, 13\}$.

6. (S:L11.4.iunie) $a = 3k$, $b = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ verifică condiţia din enunţ: $a^2 + b^2 + ab = (3k)^2 + (5k)^2 + 3k \cdot 5k = (7k)^2$. Cum mulţimea $\mathbb{N}$ este infinită rezultă că există o infinitate de perechi (a, b), $a = 3k$, $b = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ cu proprietatea din enunţ.

7. **(S:L11.7.iunie)** Dacă $N=2\underbrace{33...3}_{n\text{ cifre}}003$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ constatăm că $N^2=5\underbrace{44...4}_{n-1\text{ cifre}}2902003\underbrace{88...8}_{n-2\text{ cifre}}998009$. Observând că N^2 conține $2n+7$ cifre, are exact trei cifre 0 și ultima cifră este nenulă, pentru $n=1002$, N^2 este un exemplu ce verifică condițiile date. Avem că $N=2\cdot 10^{n+3}+\dfrac{10^n-1}{3}\cdot 10^3+3=\dfrac{7\cdot 10^{n+3}-991}{3}$, rezultă că $N^2=$ $=\dfrac{49\cdot 10^{2n+6}-13874\cdot 10^{n+3}+982081}{9}$ (1). Pentru a justifica exemplul dat, avem $=5\underbrace{44...4}_{n-1\text{ cifre}}2902003\underbrace{88...8}_{n-2\text{ cifre}}998009=5\cdot 10^{2n+6}+4\cdot\dfrac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10^{n+7}+2902\cdot 10^{n+3}+8\cdot\dfrac{10^{n-3}-1}{9}\cdot$ $\cdot 10^6+998009=\dfrac{49\cdot 10^{2n+6}-4\cdot 10^{n+7}+26118\cdot 10^{n+3}+8\cdot 10^{n+3}-8\cdot 10^6+998009\cdot 9}{9}=$ $=\dfrac{49\cdot 10^{2n+6}-13874\cdot 10^{n+3}+982081}{9}$. Conform (1) verificarea este completă.

8. **(S:L11.9.iunie)** Restul împărțirii lui a la 3 este egal cu restul împărțirii la 3 a sumei $a_1+a_2+...+a_p$. Cum $k!\equiv 2 \pmod 3$, $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $k\geq 3$ rezultă că a are forma $a=3m+2$, unde $m\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare $a_1+a_2+...+a_p=3q+2$, unde $q\in\mathbb{N}^*$. Deoarece restul împărțirii la 3 a unui pătrat perfect este 0 sau 1, rezultă că a nu poate fi pătrat perfect. Observăm că $s=10(a_1+a_3+...)+a_2+a_4+...=3u+\ a_1+a_2+...+a_p\ =3M+2$. Prin urmare, s nu poate fi pătrat perfect. <u>Obs</u>. Ultima cifră a lui a este 2, rezultă că a nu poate fi pătrat perfect. Această justificare nu sprijină şi proprietatea că s nu poate fi pătrat perfect.

9. **(S:L11.10.iunie)** Dacă $a\in\mathbb{N}$ îndeplineşte condiția pentru $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă relațiile $10^{n-1}\leq a<10^n$ şi $2^{2n-1}\leq a<2^{2n}$. Cum $10^{n-1}\geq 2^{2n}\Leftrightarrow\left(\dfrac{5}{2}\right)^n\geq 10$ este adevărată pentru $\forall\, n\in\mathbb{N}$, rezultă că proprietatea poate avea loc în cazul $n\in\{1, 2\}$. Cum $3=2+1=$ $=11_{(2)}$ și $11=2^3+2+1=1011_{(2)}$, rezultă că în cazul $n\in\{1, 2\}$ răspunsul este afirmativ, iar pentru $n\geq 3$, răspunsul este negativ.

10. **(S:L11.2.octombrie)** $n=3$, 15, 120 verifică condiția din enunț.

$$\begin{cases} n+1=k^2 \\ 8(k^2-1)+1=p^2 \Leftrightarrow 8k^2-p^2=7 \end{cases}$$

11. **(S:L11.8.octombrie)** Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, notăm cu $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ (se citeşte n factorial, convențional avem $0!=1!=1$). Cum toate numerele naturale de forma $2013!+2$, $2013!+3$, …, $2013!+2013$ sunt numere întregi compuse; alegem ca exemplu intervalul $[2013!+2;\ 2013!+2013]$ care are lungimea $2012>2011$.

12. **(S:L11.8.noiembrie)** Numerele 7, 37, 67, 97, 127, 157 sunt în progresie aritmetică având rația 30.

13. **(S:L12.4.ianuarie)** Fie $x=a^2+b^2$ şi $y=c^2+d^2$ unde $a, b, c, d\in\mathbb{N}$.

Atunci $x\cdot y = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$. Rezultă că afirmația este adevărată. Obs. De fapt este vorba despre identitatea lui Lagrange.

14. (S:L12.7.ianuarie) Răspuns NU. Între numerele 1006 și 2012 există un număr prim p și atunci numărul $S = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{p}$; $\frac{1}{p}$ este singurul termen din sumă care are la numitor multiplu de p, deci p nu divide b. Se poate lua $p = 2011$. Distingem cazurile: Cazul I. Dacă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{p} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{a}{b} \pm \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow S$ nu este număr întreg. Cazul 2. Dacă $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$ atunci $S = \frac{a}{b} \pm \frac{1}{p} = \frac{ap \pm b}{bp}$ și observăm că această fracție nu se simplifică prin $p \Rightarrow S \notin \mathbb{Z}$.

15. (S:L12.8.ianuarie) Răspuns DA. În revista de cultură matematică *ARHIMEDE* nr. 3-4, martie-aprilie 2004, este publicat articolul „Suma cifrelor unui număr natural", autori Gabriel Dospinescu și Adrian Zahariuc. În articolul mai sus numit sunt formulate problemele: I. Dacă $1 \le x \le 10^n$, atunci $s(x(10^n - 1)) = 9n$. Eliminând eventual zerourile în care se termină x (nu se modifică suma cifrelor), presupunem $x = \overline{a_1a_2\ldots a_j}$, unde $a_j > 0$, $j \le n$, atunci $x(10^n - 1) = \overline{a_1a_2\ldots a_j\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ ori}}} - \overline{a_1a_2\ldots a_j} = \overline{a_1a_2\ldots a_{j-1}(a_j-1)\underbrace{99\ldots9}_{n-j\text{ ori}}(9-a_1)(9-a_2)\ldots(9-a_{j-1})(10-a_j)}$. Evident $s(x(10^n - 1)) = 9n$. II. Arătați că pentru orice n există un număr cu n cifre nenule divizibil cu suma cifrelor lui. *IMO Shortlist*. Analizăm două cazuri: i) n este o putere a lui 3, adică $n = 3^k$, unde $k \in \mathbb{N}$. Numărul $p = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ ori}}}$ îndeplinește condiția, deoarece se demonstrează ușor prin inducție că $3^{k+2} \mid 10^{3^k} - 1$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Ii) Dacă există $k \in \mathbb{N}$, astfel încât $3^k < n < 3^{k+1}$, determinăm un număr cu n cifre nenule de forma $p = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{s\text{ ori}}b}\cdot(10^t - 1)$, cu $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{s\text{ ori}}b} \le 10^t - 1$. Atunci acest număr are suma cifrelor $9t$ și mai impunem $s + t + 1 = n$ cifre. Așadar $s = n - t - 1$ și $9t \mid \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{s\text{ ori}}b}\cdot(10^t - 1)$ dacă t este o putere a lui 3. Considerăm $t = 3^k$. Din condiția $\overline{\underbrace{aa\ldots a}_{s\text{ ori}}b} \le 10^t - 1$, putem alege $p = \overline{\underbrace{11\ldots1}_{n-3^k-1\text{ ori}}2}\cdot\left(10^{3^k} - 1\right)$ dacă $n \le 2\cdot 3^k$ sau $p = \overline{\underbrace{22\ldots2}_{n-2\cdot3^k\text{ ori}}}\cdot\left(10^{2\cdot3^k} - 1\right)$ în cazul $n > 2\cdot 3^k$, exemple ce verifică condiția dată. Pentru problema dată $n = 2012$, rezultă $k = 6$ și cum $2012 > 2\cdot 3^6$ rezultă că putem alege $a = \overline{\underbrace{22\ldots2}_{554\text{ ori}}}\cdot\left(10^{1458} - 1\right) = \overline{\underbrace{22\ldots2}_{553\text{ ori}}1\underbrace{99\ldots9}_{904\text{ ori}}\underbrace{77\ldots7}_{553\text{ ori}}8}$.

16. (S:L12.7.februarie) Nu, deoarece împărțind acel număr care are ultima cifră 2 la 2 se va obține un număr impar. Bineînțeles în cazul când ultima cifră este 1, numărul este impar deci nu se divide nici măcar cu 2.

17. (S:L12.6.martie) Dacă S este aria triunghiului avem $p = 6r \Leftrightarrow 6S = p^2 \Leftrightarrow 36S^2 = p^4$. Notând cu a, b, c lungimile laturilor și aplicând formula lui Heron rezultă