Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)

Adrian Boțan
Gabriel Popa
Gabriela Zanoschi
Gheorghe Iurea
Adrian Zanoschi
Dorel Luchian
Ciprian Baghiu

Teme Supliment Gazeta Matematică

clasa a X-a

(2012 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

enunţuri soluţii

Capitolul I
NUMERE REALE

Breviar teoretic

1. Parte întreagă. Parte fracționară

Partea întreagă a numărului real x este cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe x. Partea întreagă a numărului real x se notează cu $[x]$.

Partea fracționară a numărului real x este diferența dintre x și partea sa întreagă. Notăm partea fracționară a lui x cu $\{x\}$ și avem $x = [x] + \{x\}$.

Proprietăți:

a) $[x] \in \mathbb{Z}$; $[x] \le x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

b) $x < y \Rightarrow [x] \le [y]$, $x, y \in \mathbb{R}$;

$[x] < [y] \Rightarrow x < y$, $x, y \in \mathbb{R}$;

$[x] = [y] \Rightarrow |x - y| < 1$, $x, y \in \mathbb{R}$;

c) $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

d) $[x + n] = [x] + n$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$; $\{x + n\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$;

e) $[-x] = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x], & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$; $\{-x\} = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ 1 - \{x\}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$;

f) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$ (Hermite).

2. Ecuația lui Pell

Fie $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 2$, un număr natural care nu este pătrat perfect.

Ecuația $x^2 - dy^2 = 1$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$, se numește *ecuația lui Pell*.

Considerând (x_0, y_0), $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$, soluția minimală (cu $x_0 \ge 2$ minim), care există!, soluțiile (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ ale ecuației Pell sunt date de relația:

$$x_n + \sqrt{d}\, y_n = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)\left(x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{d}\right) = \left(x_0 + y_0\sqrt{d}\right)^{n+1}, \ n \in \mathbb{N},$$

la care adăugăm soluția $(1, 0)$.

3. Recurențe liniare omogene de ordinul doi

Fie $(a_n)_{n\ge 0}$ un șir care verifică relația de recurență $a_{n+2} + a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, iar $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dacă r_1, r_2 sunt rădăcinile ecuației $r^2 + ar + b = 0$, avem:

1) dacă $r_1 \ne r_2$, atunci $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) dacă $r_1 = r_2$, atunci $a_n = r_1^n (c_1 n + c_2)$, $n \in \mathbb{N}$,

unde c_1, c_2 sunt constante care se determină din condițiile $a_0 = \alpha$, $a_1 = \beta$.

4. Inegalități clasice

- *Inegalitatea mediilor*

Pentru orice $a_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, avem:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

- *Cauchy–Buniakovsky–Schwarz* (CBS)

Pentru orice numere reale a_i, b_i, $i = \overline{1, n}$, avem:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

- *H. Bergström*

Pentru orice $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, avem:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

- *Hölder*

Pentru orice $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, și orice $p, q \in (0, \infty)$ pentru care $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avem:

$$\left(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \ldots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

- *Jensen*

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, o funcție convexă. Pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$, avem:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

În cazul în care funcția f este concavă, inegalitatea își schimbă sensul.

- *Bernoulli*

Dacă $x \in (-1, \infty)$ și $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, atunci $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$ (cu egalitate pentru $x = 0$).

Dacă $x \in (-1, \infty)$ și $\alpha \in (0, 1)$, atunci $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ (cu egalitate pentru $x = 0$).

- *Cebîșev*

Pentru orice două șiruri de numere reale (a_i), (b_i), $i = \overline{1, n}$, la fel ordonate, avem:

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

În cazul în care cele două șiruri sunt invers ordonate, inegalitatea își schimbă sensul.

5. Extremele unei funcții de *n* variabile

Dacă $E(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție care depinde de variabilele $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$, …, $x_n \in D_n$ ($D_i \subset \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$), atunci:

1) $\max E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M$, cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, dacă $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le M$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ și există $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in$ $\in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, cu $E\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = M$;

2) $\min E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m$, cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, dacă $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge m$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ și există $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in$ $\in D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$, cu $E\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) = m$.

6. Polinoame cu coeficienți reali

Un *polinom* cu coeficienți reali f este o expresie de forma $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} +$ $+ \ldots + a_1X + a_0$, unde $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sunt *coeficienții* polinomului ($a_n \neq 0$), X este *variabila*, iar $n \in \mathbb{N}$ se numește *gradul* polinomului.

Se numește *ecuație algebrică* o ecuație de forma $f(x) = 0$, unde f este un polinom cu coeficienți reali. Spunem că numărul complex a este *rădăcină* a polinomului f (sau *soluție* a ecuației $f(x) = 0$) dacă $f(a) = 0$. Un polinom de grad n are exact n rădăcini complexe.

Câteva rezultate pe care le vom folosi:

a) Fie f un polinom cu coeficienți reali și $a < b$ două numere reale astfel încât numerele $f(a)$ și $f(b)$ să aibă semne diferite. Atunci, în intervalul (a, b) se află cel puțin o rădăcină reală a polinomului.

b) Dacă polinomul f are coeficienți întregi, $f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, $a_n \neq 0$ și admite rădăcina rațională $x_0 = \dfrac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$), atunci p divide termenul liber a_0 și q divide coeficientul dominant a_n.

c) **Relațiile lui Viète**. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului:

$$f = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0,\ a_n \neq 0, \text{ atunci } \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

7. Densitate în $\mathbb{R}$

Fie A o submulțime a lui $\mathbb{R}$. Spunem că mulțimea A este *densă* în $\mathbb{R}$ dacă orice interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ conține cel puțin un element al lui A.

Teorema lui Kroneker. Dacă α este număr irațional, mulțimea $A = \{m + \alpha n \mid m, n \in$ $\in \mathbb{Z}\}$ este densă în $\mathbb{R}$.

Consecință (Jacobi). Dacă α este număr irațional, mulțimea valorilor șirului $x_n = \{\alpha n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (unde $\{\cdot\}$ desemnează partea fracționară) este densă în intervalul $(0, 1)$.

Enunțuri

1. Determinați numărul natural n pentru care:

$$a^n + b^n + c^n + (a + b + c)^n = (a + b)^n + (b + c)^n + (c + a)^n,$$

oricare ar fi $a, b, c \in (0, \infty)$.

Dan Negulescu (**S:L14.218**, SGM 9/2014)

2. Calculați suma $\sum\limits_{1\le i<j<k\le n} \dfrac{i+j}{k}$, unde $n \geq 3$ este un număr natural.

Sorin Dumitrică (**3**, SGM 4/2012)

3. Un ceas defect arată ora 12:00. Din acest moment, acul orar se deplasează cu $a°$ într-o oră, iar acul minutar cu $b°$ într-o oră, unde $a, b > 0$.

a) Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, demonstrați că există un număr natural nenul n astfel încât cele două ace ale ceasului să se suprapună exact după n ore.

b) Dacă $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, acele ceasului nu sunt suprapuse după n ore.

Steluța Monea (**S:L14.335**, SGM 12/2014)

4. Există numere iraționale $a, b > 0$, astfel încât a^b să fie număr rațional?

(**3**, SGM 2/2012)

5. Demonstrați că mulțimea numerelor iraționale x pentru care 2^x este pătrat perfect (număr natural) este infinită.

(**1**, SGM 5/2012)

6. Determinați mulțimea A a numerelor raționale neîntregi x pentru care 2^x este întreg.

(**2**, SGM 5/2012)

7. Fie m, n numere naturale nenule, astfel încât $\sqrt{3} > \dfrac{m}{n}$. Arătați că:

$$\sqrt{3} - \frac{m}{n} > \frac{1}{n(m+1)}.$$

(**6**, SGM 5/2011)

8. Care sunt valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $n > \sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}$?

Dan Nedeianu (**S:L13.14**, SGM 1/2013)

9. Arătați că $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sqrt{2k(2k+1)}}{4k+1} < \dfrac{n}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Mariana Lazăr (**4**, SGM 4/2012)

10. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}} < \frac{n(n+2)}{2(n+1)^2}.$$

George-Florin Șerban (**S:L15.251**, SGM 10/2015)

11. Arătați că $\sum\limits_{k=2}^{2015}\left(\dfrac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}}\right) > \dfrac{1007}{2\cdot 2016^2}$.

Carmen Botea și *Viorel Botea* (**S:L15.252**, SGM 10/2015)