Mircea Fianu
Lucia Iepure

Cristian Pop
Vasile Șerdean

GEOMETRIE

clasa a VI-a

-excelență-

Biblioteca Olimpiadelor de Matematică
41

Editura GIL
Zalău

Cuprins

Capitolul 1

Geometrie

1.1 Segmente

Probleme rezolvate

1. *Pe o dreaptă luăm punctele A, B, C, D astfel încât $AB = a$ cm, $AC = b$ cm, $BD = c$ cm, $BC = a + b$ cm, $CD = a + b - c$ cm, $AD = c - a$ cm. În ce ordine sunt punctele pe dreaptă? ($c > a$, $a + b > c$).*

Etapa județeană, Vaslui, 1986

Soluţie. (Fig. 1-1, Fig. 1-2) Din $BC = a + b = AB + AC$ rezultă că A este situat între B şi C. Din $CD = a+b-c = AB+AC-BD = (AB+AC)-BD = BC-BD$, de unde $BC = CD + BD$, deci D este situat între B şi C. Din $AD = c-a = BD - AB$ rezultă că $BD = AB + AD$, deci A este între B şi D. Atunci ordinea punctelor este: B, A, D, C sau C, D, A, B.

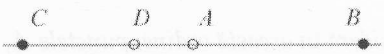

Fig. 1-1

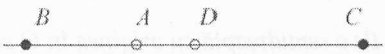

Fig. 1-2

2. *Pe o dreaptă se consideră punctele A, M, N, C, P, Q, B (în această ordine) astfel încât: $[AM] \equiv [MN] \equiv [NC]$, $[CP] \equiv [PQ] \equiv [QB]$ şi $AB = 12$ cm.*

a) Să se calculeze lungimile segmentelor $[MQ]$ şi $[NP]$.

b) Ce lungime trebuie să aibă segmentul $[AC]$ pentru ca P să fie mijlocul segmentului $[AB]$? Dar pentru ca N să fie mijlocul segmentului $[AP]$?

Etapa județeană, Harghita, 2000

Soluţie. (Fig. 1-3) Fie $AM = a$ şi $CP = b$, atunci $AM = MN = NC = a$, $CP = PQ = QB = b$, iar $AB = 3a + 3b = 3(a + b)$ sau $12 = 3(a + b)$, de unde $a + b = 4$.

a) $MQ = MN+NC+CP+PQ = 2a+2b = 2(a+b) = 2 \cdot 4 = 8$, iar $NP = a+b = 4$.

b) Dacă P este mijlocul lui $[AB]$ avem: $AP = PB = 6$, dar $AP = 3a + b$, deci $3a + b = 6$ şi $PB = 2b$, deci $2b = 6$ rezultă $b = 3$ şi din $3a + b = 6$ obţinem $a = 1$. $AC = 3a = 3$. Dacă N este mijlocul segmentului AP atunci $AN = NP$ şi deci $2a = a + b$, de unde $a = b$. Cum $a + b = 4$ obţinem $a = b = 2$ şi atunci $AC = 3a = 3 \cdot 2 = 6$.

Fig. 1-3

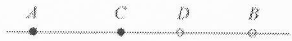

Fig. 1-4

3. *Pe o dreaptă se consideră punctele A, C, D, B în această ordine astfel încât $7AC = 3CB$ şi $3AD = 2DB$. Arătaţi că $AB = 3AC + CD$.*

Concursul "Petru Moroşan", 2005

Soluţie. (Fig. 1-4) Avem $CB = CD + DB$, $AD = AC + CD$. Atunci relaţiile din ipoteză devin: $7AC = 3(CD+DB)$ şi $3(AC+CD) = 2DB$ sau $7AC = 3CD+3DB$ şi $3AC+3CD = 2DB$, de unde $3CD = 7AC-3DB$ şi atunci $3AC+7AC-3DB = 2DB$ de unde obţinem $10AC = 5DB$, adică $DB = 2AC$ şi atunci $3CD = 7AC - 6AC$, adică $3CD = AC$. Astfel $AB = AC + CD + DB = AC + CD + 2AC = 3AC + CD$.

4. *Pe o dreaptă d se consideră punctele A, C, D, B în această ordine, astfel încât $7AC = 3CB$ şi $3AD = 2DB$. Arătaţi că $AB = 10CD$.*

Vasile Şerdean, Etapa locală, Cluj, 2003

Soluţie. (Fig. 1-5) Din $7AC = 3CB$, rezultă $\frac{AC}{3} = \frac{CB}{7} = k$ $(k > 0)$, de unde $AC = 3k$, $BC = 7k$ şi $AB = AC+BC = 10k$. Fiindcă $AD+DB = AB \Leftrightarrow AD+DB = 10k$ şi $3AD = 2DB$. Obţinem $\frac{2DB}{3} + DB = 10k \Leftrightarrow 5DB = 30k \Leftrightarrow DB = 6k$. Atunci $AD = \frac{2DB}{3} = \frac{2\cdot 6k}{3} = 4k$. Avem $CD = AD - AC = 4k - 3k = k$. Fiindcă $AB = 10k$ şi $CD = k$ rezultă $AB = 10CD$.

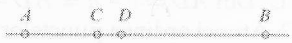

Fig. 1-5

Fig. 1-6

5. *Pe o semidreaptă cu originea în O se consideră în această ordine, punctele A, B, C şi M, N, P mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Aflaţi valoarea raportului*

$$\frac{OA+OB+OC}{OM+ON+OP}.$$

Soluţie. (Fig. 1-6) Avem $OB = OA + AB$, $OC = OA + AB + BC$ şi atunci $OA + OB + OC = 3OA + 2AB + BC$, iar $OM = OA + AB + \frac{BC}{2}$, $ON = OA + \frac{AC}{2}$, $OP = OA + AP = OA + \frac{AB}{2}$, de unde

$$OM + ON + OP = 3OA + \left(AB + \frac{AB}{2}\right) + \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} =$$

$$= 3OA + AB + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{AB+BC}{2} =$$

$$= 3OA + AB + \left(\frac{AB}{2} + \frac{AB}{2}\right) + \left(\frac{BC}{2} + \frac{BC}{2}\right) = 3OA + 2AB + BC.$$

Deci valoarea raportului $\frac{OA+OB+OC}{OM+ON+OP} = 1$.

6. *Pe segmentul $[AB]$ se iau punctele C, D, E, F în această ordine astfel încât:*

$$AC = \frac{AB}{7},\ CD = \frac{9AB}{35},\ DE = \frac{AB}{10},\ EF = \frac{EB}{3}.$$

Să se afle cel mai mic număr natural $n \neq 0$ astfel încât $[AB]$ să poată fi împărţit în n segmente congruente, iar C, D, E, F să fie unele dintre punctele de diviziune.

Romanţa Ghiţă, Ioan Ghiţă, Concursul "Sim", 2007

Soluţie. (Fig. 1-7) Din $EF = \dfrac{EB}{3}$ cu $EB = EF + FB$ obţinem

$$EF = \frac{EF + FB}{3} \Leftrightarrow 3EF = EF + FB \Leftrightarrow 2EF = FB \Leftrightarrow EF = \frac{FB}{2}.$$

Atunci

$$AB = AC + CD + DE + EF + FB \Leftrightarrow AB = \frac{AB}{7} + \frac{9AB}{35} + \frac{AB}{10} + \frac{FB}{2} + FB \Leftrightarrow$$

$$AB - \frac{AB}{7} - \frac{9AB}{35} - \frac{AB}{10} = \frac{3FB}{2} \Leftrightarrow$$

$$AB\left(1 - \frac{1}{7} - \frac{9}{35} - \frac{1}{10}\right) = \frac{3FB}{2} \Leftrightarrow AB \cdot \frac{1}{2} = \frac{3FB}{2} \Leftrightarrow FB = \frac{AB}{3}.$$

Atunci $EF = \dfrac{FB}{2} = \dfrac{AB}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{AB}{6}$ şi deci $FB = 2EF = 2 \cdot \dfrac{AB}{6} = \dfrac{AB}{3}$. Cel mai mic număr natural nenul astfel încât $[AB]$ să poată fi împărţit în n segmente, iar C, D, E, F să fie unele dintre punctele de diviziune este $[7, 35, 10, 6, 3] = 210$.

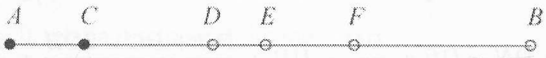

Fig. 1-7

7. *Fie A, B, C, D patru puncte coliniare astfel încât $AC + CB + BD = AD$. Dacă M este mijlocul lui $[AB]$, N este mijlocul lui $[CD]$ astfel încât punctele M şi N sunt concomitent în interiorul segmentului $[BC]$ sau în exteriorul segmentului $[BC]$ şi $[CM] \equiv [NB]$, arătaţi că $[AC] \equiv [BD]$.*

Ion Cicu, Concursul "Josse Marti", 2009

Soluţie. (Fig. 1-8, Fig. 1-9, Fig. 1-10, Fig. 1-11) Din $AC + CB + BD = AD$ rezultă că punctele B şi C sunt între A şi D.

1) Dacă avem ordinea A, C, B, D, avem şi aici două situaţii:

a) Punctele M şi N sunt în interiorul segmentului $[BC]$, atunci $AM = \dfrac{AB}{2}$, $ND = \dfrac{CD}{2}$ şi

$$CM = AM - AC = \frac{AB}{2} - AC = \frac{AC + CB - 2AC}{2} = \frac{CB - AC}{2},$$

$$BN = \frac{CD}{2} - BD = \frac{CB + BD}{2} - BD = \frac{CB - BD}{2}.$$

Din $[CM] \equiv [NB]$ şi $CM = \dfrac{CB - AC}{2}$, $BN = \dfrac{CB - BD}{2}$ rezultă $[AC] \equiv [BD]$.

b) Dacă punctele M şi N sunt în exteriorul segmentului $[BC]$ atunci

$$CM = AC - AM = AC - \frac{AB}{2} = AC - \frac{AC + BC}{2} = \frac{AC - BC}{2}$$

$$NB = BD - ND = BD - \frac{CD}{2} = BD - \frac{BC + BD}{2} = \frac{BD - BC}{2}.$$

Din $[CM] \equiv [NB]$ şi $CM = \dfrac{AC - BC}{2}$, $NB = \dfrac{BD - BC}{2}$, rezultă $[AC] \equiv [BD]$.

1) a)

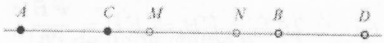

Fig. 1-8

1) b)

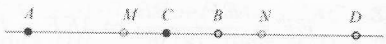

Fig. 1-9

2) a)

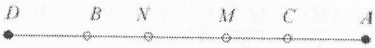

Fig. 1-10

2) b)

Fig. 1-11

2) Dacă avem ordinea D, B, C, A avem iar două situaţii.

a) Punctele M şi N sunt în interiorul segmentului $[BC]$

$$CM = \frac{AB}{2} - AC = \frac{BC + AC - 2AC}{2} = \frac{BC - AC}{2}$$

$$BN = DN - DB = \frac{DC}{2} - DB = \frac{DB + BC - 2DB}{2} = \frac{BC - DB}{2}.$$

Din $(CM) \equiv (BN)$ şi $CM = \dfrac{BC - AC}{2}$, $BN = \dfrac{BC - DB}{2}$ rezultă că $(AC) \equiv (DB)$.

b) Dacă M şi N sunt în exteriorul segmentului $[BC]$ atunci

$$CM = CA - AM = CA - \frac{AB}{2} = CA - \frac{CA + BC}{2} = \frac{AC - BC}{2}$$

$$BN = NC - BC = \frac{DC}{2} - BC = \frac{DB + BC - 2BC}{2} = \frac{DB - BC}{2}.$$

Din $(CM) \equiv (BN)$ şi $CM = \dfrac{AC - BC}{2}$, $BN = \dfrac{DB - BC}{2}$ rezultă că $(AC) \equiv (DB)$.

8. *Pe o dreaptă d se consideră punctele diferite A_1, A_2, A_3, A_4, în această ordine. Ştiind că B este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$, C este mijlocul segmentului $[A_3A_4]$, D este mijlocul segmentului $[BC]$, iar $BC = 3A_2A_3$, $3BA_2 = 2CA_4$ şi $A_2C = 33$ cm, să se calculeze lungimile segmentelor (A_1A_2), (A_3A_4), (BC), (DA_4), (A_1D), (A_1A_4).*

Soluţie. (Fig. 1-12) Fie $A_1B = a$, $A_3C = b$, $A_2A_3 = c$. Atunci $BA_2 = a$, $CA_4 = b$, $BC = BA_2 + A_2A_3 + A_3C = a + c + b$. Relaţia $BC = 3A_2A_3$ din ipoteză, se mai scrie:

$$a + c + b = 3c \Leftrightarrow a + b = 2c \qquad (1)$$

Din $3BA_2 = 2CA_4$ obținem $3a = 2b$. Fie $3a = 2b = k$ $(k > 0)$. Atunci $a = \frac{k}{3}$, $b = \frac{k}{2}$, iar din (1) avem

$$a + b = 2c \Leftrightarrow \frac{k}{3} + \frac{k}{2} = 2c \Leftrightarrow \frac{5k}{6} = 2c \Leftrightarrow c = \frac{5k}{12}.$$

Fiindcă $A_2C = 33$ cm și $A_2C = c + b$, deducem

$$b + c = 33 \Leftrightarrow \frac{k}{2} + \frac{5k}{12} = 33 \Leftrightarrow \frac{6k + 5k}{12} = 33 \Leftrightarrow \frac{11k}{12} = 33 \Leftrightarrow k = 36.$$

Atunci

$$a = \frac{k}{3} = \frac{36}{3} = 12\,(\text{cm}),\ b = \frac{k}{2} = \frac{36}{2} = 18\,(\text{cm}),\ c = \frac{5}{12}\cdot k = \frac{5}{12}\cdot 36 = 5\cdot 3 = 15\,(\text{cm}),$$

$$A_1A_2 = 2a = 2\cdot 12 = 24\,(\text{cm}),\ A_3A_4 = 2b = 2\cdot 18 = 36\,(\text{cm}),$$

$$BC = a + c + b = 12 + 15 + 18 = 45\,(\text{cm}),$$

$$DA_4 = DC + CA_4 = \frac{BC}{2} + CA_4 = \frac{45}{2} + 18 = \frac{81}{2} = 40,5\ (\text{cm})$$

$$A_1D = A_1B + BD = a + \frac{BC}{2} = 12 + \frac{45}{2} = \frac{69}{2} = 34,5\ (\text{cm})$$

$$A_1A_4 = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 = 2a + c + 2b = 24 + 15 + 2\cdot 18 = 75\ (\text{cm})$$

9. *Fie $n \in \mathbb{N}$ și punctele coliniare A, B, C, D (considerate în această ordine) astfel încât*

$$AB + 2^n \cdot BC + 3^n \cdot CD = 2^n \cdot 3^{n-1} \cdot AD.$$

Determinați poziția punctului $M \in [BC]$ cu proprietatea $AM\cdot MC = BM\cdot MD$.

I. Safta, Etapa județeană, Mehedinți, 2004

Soluție. (Fig. 1-13)

a) Pentru $n = 0$, relația din ipoteză devine:

$$AB + BC + CD = \frac{AD}{3} \Leftrightarrow AB + BC + CD = \frac{AB + BC + CD}{3} \Leftrightarrow$$

$$3AB + 3BC + 3CD = AB + BC + CD \Leftrightarrow 2AB + 2BC + 2CD = 0,$$

relație imposibilă, deci $n \neq 0$.

b) Pentru $n = 1$ avem:

$$AB + 2BC + 3CD = 2AD \Leftrightarrow AB + 2BC + 3CD = 2(AB + BC + CD) \Leftrightarrow$$

$$AB + 2BC + 3CD = 2AB + 2BC + 2CD \Leftrightarrow CD = AB.$$

Dar $AM\cdot MC = BM\cdot MD \Leftrightarrow (AB + BM)\cdot MC = BM(MC + AB) \Leftrightarrow$

$$AB\cdot MC + BM\cdot MC = BM\cdot MC + BM\cdot AB \Leftrightarrow AB\cdot MC = BM\cdot AB \Rightarrow$$

$\Rightarrow MC = MB$ adică M este mijlocul lui $[BC]$ deci și a lui $[AD]$ pentru că $CD = AB$.

c) Dacă $n \geq 2$ avem $2^n > 3$, $3^n > 3$, $6^n > 3$ și deci $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6^n} < \frac{1}{3}$. Relația din ipoteză se mai scrie

$$AB + 2^n\cdot BC + 3^n\cdot CD = 2^n\cdot 3^{n-1}\cdot AD \Leftrightarrow \frac{AB}{6^n} + \frac{2^n\cdot BC}{6^n} + \frac{3^n\cdot CD}{6^n} = \frac{AD}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{AB}{6^n} + \frac{BC}{3^n} + \frac{CD}{2^n} = \frac{AB + BC + CD}{3} \tag{1}$$

Dar

$$\frac{AB}{6^n} + \frac{BC}{3^n} + \frac{CD}{2^n} < \frac{AB}{3} + \frac{BC}{3} + \frac{CD}{3} \tag{2}$$

Din (1) și (2) obținem o imposibilitate. Deci avem soluție numai în cazul b) când $n = 1$.

Fig. 1-12

Fig. 1-13

Probleme propuse

1. *Fie punctele E, G, H, F coliniare şi distincte. Ştiind că $EH = b$, $EG = a$, $GF = d$, $EF = a + d$, $HG = a - b$, $HF = a + d - b$, să se determine ordinea acestor puncte pe dreaptă.*

Etapa locală, Constanţa, 1988

2. *Se dau punctele coliniare A, B, C şi D în această ordine astfel încât $4AB + 5AD = 9AC$ şi $BD = 18$ cm. Să se afle lungimile segmentelor $[BC]$ şi $[CD]$.*

Nicolae Dinuţă, Concursul "Dan Barbilian", 2004

3. *Considerăm punctele C şi D (diferite) pe segmentul $[AB]$, astfel încât $4AC = 3BD$ şi $5CB = 6AD$. Arătaţi că $AB = 3AC$ şi $DB = 2CD$.*

Vasile Şerdean, Etapa locală, Cluj, 2000

4. *Fie dreapta d şi $A \in d$, $B \in d$, $C \in (AB)$ astfel încât $AC < CB$. Dacă $D \in d$, $E \in d$ astfel încât A, respectiv B să fie mijloacele segmentelor (CD) şi (CE), M este mijlocul lui (DE), N este mijlocul lui (AB), iar $MN = 5$ cm, calculaţi CN.*

Iuliana Gimoiu, Daniel Stretcu, Etapa locală, Mehedinţi, 2003

5. *Fie punctele coliniare A, B, C, D (în această ordine) astfel încât:*

$$AB + 2BC + 3CD = 2AD.$$

Determinaţi punctul $M \in (BC)$ cu proprietatea: $AM \cdot MC = BM \cdot MD$.

Etapa locală, Vaslui, 2000

6. *Dacă A, B, C, D sunt puncte coliniare, în această ordine, să se arate că:*

$$\frac{AD}{AB} + \frac{BC}{CD} = \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}\right) \cdot BD.$$

7. *În interiorul segmentului $[AB]$ luăm punctele C şi D astfel încât*

$$AC = \frac{5}{6} \cdot AB \text{ şi } BD = \frac{4}{5} \cdot AB.$$

Fie M şi P mijloacele segmentelor $[AB]$ respectiv $[CD]$. Să se calculeze lungimea segmentului $[AB]$, dacă $MP = 11$ cm.

Etapa zonală, Harghita, 2009

8. *Pe semidreapta $[Ox$ se iau punctele A, B, C astfel încât $d(O, A) = a$, $d(O, B) = a + 8$, $d(O, C) = a - 4$ ($a > 4$ şi $d(O, A)$ înseamnă distanţa între punctele O şi A).*

a) Dacă orientarea dreptei suport a lui $[Ox$ este de la O la A, care va fi ordinea punctelor A, B, C pe semidreaptă?

b) Calculați $d(A, B)$, $d(A, C)$, $d(B, C)$.

c) Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$, iar N este mijlocul segmentului $[AC]$, calculați $d(O, M)$, $d(O, N)$ în funcție de a.

d) Arătați că A este mijlocul segmentului $[CM]$, iar

$$CN = \frac{CB}{6},\ CB = \frac{3CM}{2},\ MN = \frac{BC}{2}.$$

Titus Cărbune, Ioan Moraru, Etapa locală, Bistrița-Năsăud, 2000

9. *Punctele A, B, C, D sunt coliniare și $\frac{CA}{BA} = \frac{DA}{DB} = \frac{2}{5}$. Dacă $AB = 42$ cm, iar punctul C este interior segmentului $[AB]$, se cere:*

a) ordinea punctelor pe dreapta AB;

b) lungimea segmentului $[CD]$. (Analizați toate posibilitățile).

Etapa județeană, Mureș, 2003

10. *Fie punctele C și D de o parte și de alta a segmentului $[AB]$ astfel încât $CA \perp AB$ și $DB \perp AB$, $AC = a$, $DB = b$, $AB = a + b$ cu $a \neq b$. Mediatoarea segmentului $[CD]$ intersectează pe $[AB]$ în M. Arătați că $MB = a$.*

Gabriela Constantinescu, Etapa județeană, 2002

Soluțiile problemelor propuse

1. (Fig. 1-14, Fig. 1-15) Din $EF = a + d \Leftrightarrow EF = EG + GF$ rezultă că $G \in (EF)$. Din $HG = a - b \Leftrightarrow HG = EG - EH \Leftrightarrow EG = GH + HE$ rezultă că $H \in (EG)$. Din $HF = a + d - b \Leftrightarrow HF = EG + GF - EH \Leftrightarrow HF + EH = EG + GF$ (relație adevărată) când avem ordinea E, H, G, F. Ordinea punctelor pe dreaptă este: E, H, G, F sau F, G, H, E.

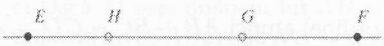

Fig. 1-14

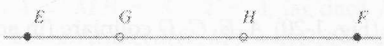

Fig. 1-15

2. (Fig. 1-16) Cu $AB = AC - BC$ și $AD = AC + CD$ relația de demonstrat devine:

$$4(AC - BC) + 5(AC + CD) = 9AC \Leftrightarrow 4AC - 4BC + 5AC + 5CD = 9AC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5CD = 4BC \Leftrightarrow \frac{CD}{4} = \frac{BC}{5} = k,$$

de unde $CD = 4k$, $BC = 5k$. Din $BD = 18$ cm, obținem: $BC + CD = 18 \Leftrightarrow 4k + 5k = 18$, de unde $k = 2$. Atunci $BC = 5k = 5 \cdot 2 = 10$ cm și $CD = 4k = 4 \cdot 2 = 8$ cm.

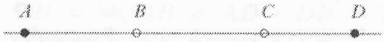

Fig. 1-16

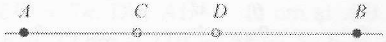

Fig. 1-17

3. (Fig. 1-17, Fig. 1-18) Din $4AC = 3BD$, rezultă $\dfrac{AC}{3} = \dfrac{BD}{4} = k$ $(k > 0)$, de unde $AC = 3k$ şi $BD = 4k$. Atunci $5CB = 6AD$ se mai scrie:

$$5(AB - AC) = 6(AB - BD) \Leftrightarrow 5(AB - 3k) = 6(AB - 4k) \Leftrightarrow$$

$$5AB - 15k = 6AB - 24k \Leftrightarrow AB = 24k - 15k \Leftrightarrow AB = 9k \Leftrightarrow AB = 3 \cdot 3k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AB = 3AC.$$

i) Dacă punctele se află pe dreaptă în ordinea A, C, D, B atunci

$$CD = AB - AC - DB = 9k - 3k - 4k = 2k.$$

$BD = 4k$ şi $CD = 2k \Rightarrow BD = 2CD$.

ii) Dacă punctele se află pe dreaptă în ordinea A, D, C, B, atunci

$$AD = AB - DB = 9k - 4k = 5k \text{ şi } CB = AB - AC = 9k - 3k = 6k$$

şi $CD = AB - AD - CB = 9k - 5k - 6k = -2k$, imposibil $(k > 0)$.

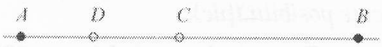

Fig. 1-18

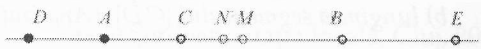

Fig. 1-19

4. (Fig. 1-19) Notăm $AC = a$, $CB = b$. Atunci $DE = 2AC + 2CB = 2(a + b)$. Fiindcă M este mijlocul lui $DE \Rightarrow DM = ME = \dfrac{2(a+b)}{2} = a + b$. N fiind mijlocul lui AB $\Rightarrow AN = NB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. Atunci

$$NM = DM - DN = a + b - (DA + AN) = a + b - \left(a + \frac{a+b}{2}\right) = a + b - \left(\frac{3a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{2a + 2b - 3a - b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Dar $NM = 5$ cm, deci $\dfrac{b-a}{2} = 5 \Rightarrow b - a = 10$ (cm) $\Rightarrow CN = CE - (NM + ME) = 2b - (5 + a + b) = 2b - 5 - a - b = b - a - 5 = 10 - 5 = 5$ (cm).

5. (Fig. 1-20) A, B, C, D coliniare (în această ordine) atunci $AB + BC + CD = AD$ şi relaţia din ipoteză devine:

$$AB + 2BC + 3CD = 2AB + 2BC + 2CD \Leftrightarrow CD = AB.$$

Fie $M \in [BC]$. Atunci

$$AM \cdot MC = BM \cdot MD \Leftrightarrow (AB + BM) \cdot MC = BM \cdot (MC + CD) \Leftrightarrow$$

$$AB \cdot MC + BM \cdot MC = BM \cdot MC + BM \cdot CD \Leftrightarrow AB \cdot MC = BM \cdot CD,$$

cum $AB = CD$ obţinem $MC = BM$ şi cum $M \in (BC)$ rezultă că M este mijlocul lui (BC).

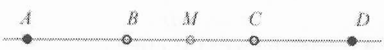

Fig. 1-20

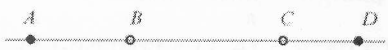

Fig. 1-21

6. (Fig. 1-21) Relaţia din ipoteză se mai scrie:

$$\frac{AD}{AB}+\frac{BC}{CD}=\frac{BD}{AB}+\frac{BD}{CD} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB}-\frac{BD}{AB}=\frac{BD}{CD}-\frac{BC}{CD} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{AD-BD}{AB}=\dfrac{BD-BC}{CD} \Leftrightarrow CD(AD-BD)=AB(BD-BC) \Leftrightarrow CD\cdot AB=$ $=AB\cdot CD$ relaţie adevărată. (Am ţinut seama că $AD-BD=AB$ şi $BD-BC=CD$).

7. (Fig. 1-22) Fie $AB=a$. Atunci $AC=\dfrac{5a}{6}$, $BD=\dfrac{4a}{5}$, $BC=AB-AC=a-\dfrac{5a}{6}=\dfrac{a}{6}$, $AD=AB-BD=a-\dfrac{4a}{5}=\dfrac{a}{5}$. Fiindcă M este mijlocul lui $[AB]$ atunci $AM=MB=\dfrac{a}{2}$, $CD=AC-AD=\dfrac{5a}{6}-\dfrac{a}{5}=\dfrac{19a}{30}$. Punctul P fiind mijlocul lui $[CD]$ avem $DP=PC=\dfrac{19a}{30}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{19a}{60}$.

$$AP=AD+DP=\frac{a}{5}+\frac{19a}{60}=\frac{12a+19a}{60}=\frac{31a}{60}<\frac{30a}{60}=\frac{a}{2},$$

deci punctul P se află la dreapta punctului M. Atunci

$$PM=AP-AM=\frac{31a}{60}-\frac{a}{2}=\frac{31a-30a}{60}=\frac{a}{60}.$$

Deci $\dfrac{a}{60}=11$, de unde $a=660$, adică $AB=660$ cm.

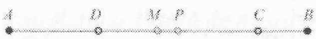

Fig. 1-22

Fig. 1-23

8. (Fig. 1-23)

a) Din $a-4<a<a+8$ avem $d(O,C)<d(O,A)<d(O,B)$. Atunci ordinea punctelor este: C, A, B.

b) $d(A,B)=AB=OB-OA=a+8-a=8$

$d(A,C)=AC=OA-OC=a-(a-4)=4$

$d(B,C)=BC=OB-OC=a+8-(a-4)=12$

c) Dacă M este mijlocul lui AB avem $MA=MB=8:2=4$, iar dacă N este mijlocul lui (CA), avem: $NC=NA=4:2=2$. Atunci $d(O,M)=d(O,B)-MB=a+8-4=a+4$, $d(O,N)=OA-AN=a-2$.

d) $AM=4$ şi $AC=4$ deci A este mijlocul lui $[CM]$. Avem $CB=12$, $CN=2$ şi $\dfrac{CB}{6}=\dfrac{12}{6}=2=CN$, iar $CM=2AM=2\cdot 4=8$, iar $\dfrac{BC}{2}=\dfrac{12}{2}=6=MN$ $(MN=NA+AM=2+4=6)$.

9. (Fig. 1-24, Fig. 1-25) $AB=42$ cm şi $\dfrac{CA}{BA}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow CA=\dfrac{2}{5}\cdot AB=\dfrac{2}{5}\cdot 42=\dfrac{84}{5}=16,8$.

Fiindcă $\dfrac{2}{5}<1$ din $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\dfrac{DA}{DB}<1$, deci $DA<DB$. Avem situaţiile:

i) $D\in[AB]$

Atunci $AB=AD+DB$. Din $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{2}{5}$, rezultă $\dfrac{DA}{2}=\dfrac{DB}{5}=k$ şi deci $DA=2k$, $DB=5k$, $AB=AD+DB=2k+5k=7k$. Din $AB=42$ cm şi $AB=7k$ obţinem $k=6$. Atunci $AD=2k=2\cdot 6=12$ cm şi $DB=5k=5\cdot 6=30$ cm. Din $AD=12$ şi $AC=16,8\Rightarrow AD<AC$ şi ordinea punctelor pe dreaptă este: A, D, C, B; $CD=AC-AD=16,8-12=4,8$ cm.

ii) Dacă $D \notin [AB]$ şi $DA < DB \Rightarrow A \in [DB]$ şi atunci $DB = DA + AB$.
Relaţia $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{2}{5}$ devine: $\dfrac{DA}{DA + AB} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow 5DA = 2(DA + 42) \Leftrightarrow 3DA = 2 \cdot 42 \Leftrightarrow$ $DA = 28$. Ordinea punctelor este D, A, C, B. Atunci $CD = AD + AC = 28 + 16,8 =$ $44,8$ cm.

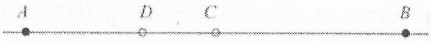

Fig. 1-24

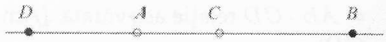

Fig. 1-25

10. (Fig. 1-26) Construim perpendiculara în C pe CA şi fie E punctul ei de intersecţie cu dreapta DB. Atunci $(AC) \equiv (BE)(a)$ şi $(AB) \equiv (CE)(a+b)$ (fiind paralele cuprinse între paralele). Obţinem că triunghiul ECD este dreptunghic cu $(EC) \equiv (ED)(a+b)$, iar mediatoarea EP va fi şi bisectoarea unghiului $\widehat{CED}$, deci $m(\widehat{BEM}) = 45°$. Cum şi $m(\widehat{EMB}) = 45°$ rezultă că triunghiul BEM este dreptunghic isoscel, deci $(EB) \equiv (MB)$ şi atunci $BM = a$.

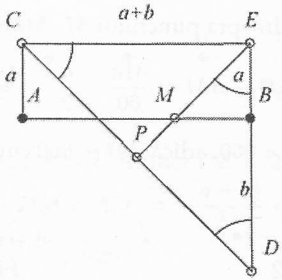

Fig. 1-26

1.2 Unghiuri

Probleme rezolvate

1. *Dintr-un punct O se duc semidreptele $[OA$, $[OB$, $[OC$ astfel ca $[OC \subset Int(\widehat{AOB})$ şi $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) = 180°$.*

a) Dacă $[OX$ este bisectoarea $\widehat{BOC}$, să se arate că $OX \perp OA$.

b) Dacă $m(\widehat{AOB}) = 3m(\widehat{BOC})$, să se calculeze $m(\widehat{AOC})$, $m(\widehat{AOB})$, $m(\widehat{XOY})$, unde $[OY$ este bisectoarea $\widehat{AOC}$.

Lucia Iepure, Etapa locală, Cluj, 1999

Soluţie. (Fig. 2-1) Dacă $x = m(\widehat{AOC})$ şi $y = m(\widehat{COB})$, atunci

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) = 180° \Leftrightarrow (x + y) + x = 180° \Leftrightarrow 2x + y = 180°.$$

a) Avem $m(\widehat{AOX}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COX}) = x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{2x + y}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$, deci $OX \perp OA$.