Radu Gologan, Ion Cicu, Alexandru Negrescu
(coordonatori)
Cosmin Manea, Dragoș Petrică, Adrian Țurcanu

Teme Suplim ent Gazeta Matematică

clasa a VI-a

(2008 – 2016)

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

CUPRINS

ALGEBRĂ

Capitolul I
MULŢIMI ŞI DIVIZIBILITATE

1. Aflaţi numerele naturale n şi m care verifică simultan condiţiile:
(i) $n=5^y\cdot 11^x$; (ii) $m=2^x\cdot 11^z$;
(iii) n are 15 divizori naturali; (iv) m are 12 divizori naturali.

Neculai Stanciu, Berca, Buzău **(S:E08.72)**

2. Fie numerele prime $n, n+1$ şi $n+11$. Arătaţi că numărul:
$$a=n^n+(n+1)^{n+1}+(n+11)^n$$
este divizibil cu 100.

Doina Stoica şi *Mircea Mario Stoica*, Arad **(S:E08.74)**

3. Aflaţi c.m.m.d.c. al numerelor $A=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 100$ şi $B=4^{41}\cdot 5^{27}$.

Gheorghe Căzănel, Dărmăneşti, Bacău **(S:E08.78)**

4. Aflaţi numerele naturale nenule a căror diferenţă este egală cu câtul lor.

Gheorghe Stoica, Petroşani **(S:E08.79)**

5. Se dă numărul $A=4^{2002}\cdot 5^{4007}+280$.
a) Precizaţi primele cinci cifre ale lui A şi ultimele cinci cifre ale lui A.
b) Arătaţi că numărul A este divizibil cu 2; 3; 4; 5; 9; 10.
c) Arătaţi că numărul A nu este pătrat perfect.

Ioana Crăciun şi *Gheorghe Crăciun*, Ploieşti **(S:E08.111)**

6. Dacă a, b, c sunt trei numere naturale astfel încât $11a+6b=5c$, arătaţi că 110 divide numărul $(a+b)(b+c)(c+a)$.

Vasile Coman, Vălenii de Munte **(S:E08.112)**

7. Se dă numărul $A=(2n+1)(4n+3)(7n+1)$. Arătaţi că:
a) A se divide cu 3, oricare ar fi n număr natural;
b) există n număr natural astfel încât A se divide cu 24.

Maria Borovina, Ploieşti **(S:E08.113)**

8. Să se rezolve ecuaţia $n+[n,8]=36$, unde $n\in\mathbb{N}$ şi $[n,8]$ este c.m.m.m.c. al numerelor n şi 8.

Cătălin Năchilă, Ploieşti **(S:E08.122)**

9. În produsul $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2007\cdot 2008$ se elimină toate numerele pare şi acelea care au ultima cifră 5. Determinaţi ultima cifră a produsului numerelor rămase.

*** **(S:E08.158)**

10. Să se arate că: $2008\,|\,2009+2009^2+...+2009^{2008}$

Cristian Moanţă, Craiova **(S:E08.169)**

11. Arătaţi că numărul $A=1973\cdot 1968^{1973}+1975\cdot 1970^{1975}-2$ este divizibil cu 1969.

Vasile Sabou, Baia Mare **(S:E09.12)**

12. Fie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 cinci numere naturale distincte între ele, care verifică egalitatea:

$$(2009 - x_1)(2009 - x_2)(x_3 - 2009)(x_4 - 2009)(x_5 - 2009) = 2009.$$

Arătați că $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \vdots 41^2$.

Vasile Ienuțaș, Baia Mare **(S:E09.19)**

13. Fie $a > b$ astfel încât $\overline{ab}$, $\overline{ba}$, a, b sunt numere prime. Definim:

$$m = \frac{1}{6}\left(2 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ba} + 1\right),\ n = \frac{1}{4}\left(3 \cdot \overline{ab} + 2 \cdot \overline{ba} - 1\right),\ p = \frac{1}{2}\left(m^2 + n^2\right).$$

a) Arătați că p nu este număr prim.

b) Determinați x din ecuația $\dfrac{p}{x-3} = \overline{ba}$.

Gizela Pascale, Târgoviște **(S:E09.58)**

14. Determinați numerele de forma $\overline{xxxyyy}$ divizibile cu 2009.

Daniel Cojocaru, Slatina, Olt **(S:E09.213)**

15. Aflați cel mai mic număr $N = 5^{3-n} \cdot 13^{5-n} + 5^{5-n} \cdot 13^{3-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, divizibil cu 250.

Neculai Stanciu, Berca, Buzău **(S:E09.217)**

16. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ notăm $A = 9a + 13b$ și $B = 8a + 11b$. Arătați că A se divide cu 5 dacă și numai dacă B se divide cu 5.

Vasile Tarciniu, Odobești, Vrancea **(S:E09.222)**

17. Fie p un număr prim. Aflați toate numerele naturale care au p divizori numere naturale.

Viorel Botea, Brăila **(S:E10.11)**

18. Determinați numerele naturale nenule a și b, știind că suma lor este 150 și:

$$[a, b] - a = (a, b) + b.$$

Am notat $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b și (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Lucian Neagu, Alexandria **(S:E10.48)**

19. Numerele a și b au câte 1005 divizori naturali. Este posibil ca produsul lor să aibă exact 2010 divizori?

Cătălin Budeanu, Iași **(S:E10.87)**

20. Fie numărul $A = 2009 \cdot 2009^2 \cdot \ldots \cdot 2009^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați n, astfel încât A să aibă exact 946 de divizori.

Mihai Crăciun, Pașcani **(S:E10.88)**

21. Fiind date mulțimile $A = \{x \mid x = 3k - 2, k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 503 + 4l, l \in \mathbb{N}\}$, $C = \{x \mid x = 4m + 3, m \in \mathbb{N}\}$, $D = \{x \mid x = 3n + 499, n \in \mathbb{N}\}$, arătați că $A \cap B = C \cap D$.

Delia Ioana Andrei, elevă, Iași **(S:E10.90)**

22. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relația:

$$\overline{abc} = a \cdot \overline{bc} + b \cdot \overline{ca} + c \cdot \overline{ab},$$

unde a, b, c sunt cifre nenule în baza zece.

Dragomir Costea, Gherla **(S:E10.125)**

23. a) Arătați că numărul $8^7 + 27^7 + 125^7 + 2010^7$ este divizibil cu 7.

b) Determinați toate numerele naturale n, pentru care numărul $A = 2008^n + 2010^n + 2012^n$ se divide cu 2010.

Ionel Tudor, Călugăreni și *Dumitru Vieru*, Dorohoi, Botoșani **(S:E10.138)**

24. Suma a 17 numere naturale nenule și distincte este 154. Arătați că produsul lor este divizibil cu 3^8.

Luca Tuță, Buzău **(S:E10.209)**

25. Aflați numărul $A = 300^n - 105^n - 286^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, este divizibil cu 91.

Marin Chirciu, Pitești **(S:E10.233)**

26. Găsiți numerele $\overline{ab}$, astfel încât $\overline{ab} + \overline{ba} + a + b$ să fie cub perfect.

Nicolae Ivășchescu, Craiova **(S:E10.250)**

27. Numărul natural A, împărțit la 48, dă restul 41 și împărțit la 50 dă restul 9. Aflați numărul A, știind că suma celor două câturi este 81.

Ion Neață, Slatina **(S:E10.251)**

28. Suma a două numere naturale este 140, iar cel mai mic multiplu comun al lor este 168. Aflați cele două numere.

Vasile Chioreanu, Carei, Satu Mare **(S:E10.252)**

29. Determinați numerele $\overline{abc}$, știind că cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{abc}$ și $\overline{cba}$ este 36.

Romanța Ghiță și *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:E10.253)**

30. Să se arate că numerele $a = 2^{2010} + 3^{2010}$ și $b = 2^{2010} + 3^{2010} + 4^{2010}$ nu sunt pătrate perfecte.

Gabriela Dincă și *Viorel Dincă*, Giurgiu **(S:E10.256)**

31. Fie numărul $\overline{abcd}$ în baza zece cu cifre mai mici decât 4. Demonstrați că: $a + b + c + d$ divide numărul $\overline{dabc}$ dacă și numai dacă divide numărul: $\overline{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}$.

Virginia Tică-Diaconu **(S:E10.286)**

32. Fie a, b numere naturale nenule. Arătați că dacă $3a + 2b$ se divide cu 67, atunci numărul $x = 6^n \cdot 1920 \cdot 4^n \cdot a + 8^n \cdot 1950 \cdot 3^n \cdot b$ se divide cu 2010, pentru orice n număr natural.

Virginia Tică-Diaconu **(S:E10.289)**

33. Determinați cel mai mic număr natural n care se divide cu 28, are suma cifrelor 28 și are ultimele două cifre 28.

* * * **(IX.2/Aprilie 2011)**

34. Considerăm toate numerele de trei cifre distincte care se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pentru fiecare număr format, considerăm toate diferențele posibile a câte două din cifrele sale. Arătați că produsul tuturor acestor diferențe, pentru toate numerele formate, este un pătrat perfect.

* * * **(S:E11.158)**

35. Fie p, q două numere prime consecutive pentru care avem $2 \cdot p + 3 \cdot q = 5 \cdot n$, cu $n \in \mathbb{N}$. Arătați că n este număr compus.

* * * **(X.6/Februarie 2012)**

36. Demonstrați că ecuația $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale.

* * * **(IX.2/Martie 2012)**

37. Aflați numerele p, știind că $p, p+4, p+20$ sunt numere prime.

Septimiu Voiculeț, Crevenicu, Teleorman **(S:E12.395)**

38. Fie numerele a, b, c numere naturale nenule astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

a) Arătați că numărul $p = (a^{2012} + b^{2012})(b^{2012} + c^{2012})$ este pătrat perfect.

b) Dacă $b = 10$, aflați suma ultimelor 2012 cifre ale lui p.

Tudor Cristea, Alexandria **(S:E12.397)**

39. Să se afle restul împărțirii numărului natural:

$$A = (9n^2 + 6n + 1)^{3n^2+4n-1} + 27n^2 + 18n + 10 \text{ la } B = 9n^2 + 6n + 1, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

Viorel Tudoran și *Alfred Eckstein*, Arad **(S:E12.517)**

40. Fie $a = 2011^m + 2013^n + 2014$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Determinați restul împărțirii numărului a la 2012.

Nelu Don, Curtici, Arad **(S:E12.519)**

41. Fie n și p numere naturale nenule, p prim, astfel încât $p^4 + 95 = n!$, unde:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Determinați n și p.

Mihai Vijdeluc, Baia Mare **(S:E12.565)**

42. Cercetați dacă există 9 numere naturale prime, diferite două câte două, a căror sumă să fie 125.

* * * **(S:E12.591)**

43. Arătați că numărul $13^{13} + 43^{43}$ este divizibil cu 14.

* * * **(S:E12.592)**

44. Aflați numărul natural a, știind că resturile împărțirii numerelor 122, 192 și 285 la a sunt numere consecutive.

* * * **(S:E12.594)**

45. Arătați că, oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte, există două a căror diferență se divide cu 10.

* * * **(S:E12.595)**

46. Aflați numerele naturale a, b, c, știind că suma lor este 255 și că $a - 14$, $b - 4$, $c + 9$ sunt numere consecutive, din care $c + 9$ este cel mai mic.

* * * **(S:E12.597)**

47. Arătați că numărul $p = \frac{10^n - 55}{45}$ este natural, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

* * * **(S:E12.598)**

48. Aflați numerele naturale m și n, știind că $3 \cdot n! + 28 = m^2$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Cătălina Oprea, Buzău **(S:E12.618)**

49. Determinați numerele naturale prime a, b, c, astfel încât:

$$a + \frac{2bc}{b^2 + c^2} = \frac{100}{17}.$$

Cristina Vijdeluc și *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare **(S:E13.27)**

50. Arătați că numărul $A = n^2 + 2n - 1$ nu se divide cu 3, oricare ar fi numărul întreg n.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat **(S:E13.31)**

51. Arătați că numărul $2^n + 3^n$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

* * * **(S:L13.87)**

52. Arătați că numărul $A = \dfrac{21^n + 23^n - 2^{2n} + 2^{n+1} \cdot 3^2}{38}$ este număr natural pentru orice n număr natural nenul.

Maria Petrescu, București **(S:E13.92)**

53. Fie numerele întregi a, b, c astfel încât $20a - 7c = 15b$. Arătați că $(a + b) \cdot c$ este divizibil cu 35.

Maria Petrescu, București **(S:E13.106)**

54. Fie numărul $N = 2n^2 - 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Descompuneți N în produs de doi factori.

b) Aflați $n \in \mathbb{N}^*$, știind că N este număr prim.

Valentin Preda, București **(S:E13.109)**

55. Să se găsească suma tuturor numerelor naturale mai mici sau egale cu 2013 care nu se divid cu suma divizorilor proprii și primi ai lui 2013.

Cristina Vijdeluc și *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare **(S:E13.178)**

56. Aflați numerele prime $\overline{ab}$, știind că $a \cdot b$ și $b : a$ sunt numere prime.

Cristina Vijdeluc și *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare **(S:E13.180)**

57. Determinați p număr natural pentru care p, $p + 2$, $p + 4$, $p + 8$ și $p + 16$ sunt simultan prime.

Gheorghe Bumbăcea, Bușteni **(S:E13.291)**

58. Să se găsească cel mai mic număr natural care are același număr de divizori ca 615.

Mariana Fleancu, Câmpulung Muscel **(S:E13.332)**

59. Determinați toate numerele naturale n astfel încât numărul $\dfrac{1+2+\ldots+n}{2}$ să fie prim.

Neculai Stanciu, Buzău și *Titu Zvonaru*, Comănești **(S:E13.336)**

60. Demonstrați că numărul $A = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ este divizibil cu 17, oricare ar fi n număr natural.

Ion Pîrșe, Câmpulung Muscel **(S:E13.345)**

61. Se consideră numerele $a_1 = 4$, $a_2 = 3a_1 + 4$, $a_3 = 3a_2 + 4^2$, …, $a_{2013} = 3a_{2012} + 4^{2012}$.

a) Calculați a_{2013}.

b) Arătați că $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013}) \vdots \dfrac{2^{22} - 1}{3}$.

Carmen Botea și *Viorel Botea*, Brăila **(S:E14.13)**

62. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ știind că $\left(\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}\right) \vdots \overline{abc}$.

Daniela Stănică și *Nicolae Stănică*, Brăila **(S:E14.14)**

63. Fie mulțimile $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, $A_3 = \{1, 3, 6\}$, $A_4 = \{1, 3, 6, 10\}$, $A_5 = \{1, 3, 6, 10, 15\}$, ...

a) Calculați $A_{20} \setminus A_{19}$.

b) Verificați dacă există n număr natural astfel încât $2013 \in A_n$.

c) Aflați numărul elementelor divizibile cu 7 din A_{2013}.

Daniela Covaci, Brăila **(S:E14.15)**

64. Aflați valoarea maximă a numărului natural n, știind că 4^n divide produsul:

$$p = 504 \cdot 505 \cdot 506 \cdot \ldots \cdot 2012 \cdot 2013.$$

Artur Bălăucă, Botoșani **(S:E14.16)**

65. Arătați că:

$$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100 - 2.$$

Nazely Boicescu, Brăila **(S:E14.17)**

66. Determinați numerele naturale nenule a, b, c, d, e, n, știind că:

$$2^{a+3} \cdot 3^b \cdot 5^{c+1} \cdot 7^d \cdot 11^e = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Mihaela Baltă, Brăila **(S:E14.18)**

67. Demonstrați că numerele $3^{3^{2013}} + 1$ și $3^{3^{2015}} + 10$ sunt prime între ele.

Nazely Boicescu, Brăila **(S:E14.19)**

68. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției:

$$1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \ldots + 2004^{2013} \,\vdots\, 6.$$

Daniela Covaci, Brăila **(S:E14.20)**

69. Arătați că numărul $\dfrac{2009^2 + a^2}{6}$ nu poate fi pătratul unui număr rațional, oricare ar fi numărul întreg a.

Dan Negulescu, Brăila **(S:E14.40**, enunț modificat**)**

70. Găsiți numerele naturale $\overline{ab}$ astfel încât $\overline{ab} = a^3 + b^3$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova **(S:E14.53)**

71. Se consideră numărul $n = 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013}$.

a) Aflați restul împărțirii lui n la 5.

b) Arătați că $9 \mid n$.

Ionel Tudor, Călugăreni și *Viorica Dogaru*, Oinacu, Giurgiu **(S:E14.77)**

72. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = 2432$ și $(a, b, c) = 8$. Calculați media aritmetică a numerelor a, b, c.

Concursul „Micul matematician", Negrești-Oaș **(S:E14.91)**

73. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și numerele $a = 4^{n+2} \cdot 5^{2n} + 2$, $b = 2^{2n} \cdot 25^{n+1} - 1$, $c = 2 \cdot 4^{n+2} \cdot 5^{2n} + 1$, $d = 2^{2n+3} \cdot 5^{2n} - 2$. Arătați că:

a) numerele a, b, c, d nu sunt prime;

b) $a + b + c + d$ este pătrat perfect.

Concursul „Micul matematician", Negrești-Oaș **(S:E14.92)**

74. Arătați că numărul $A = 2n^3 + n + 6$ se divide cu 3, oricare ar fi n număr întreg.

Luca Tuță, Buzău **(S:E14.117)**

75. Arătați că orice număr natural cu 2007 divizori este pătrat perfect.

Romanța Ghiță și *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:E14.131)**

76. Pentru câte numere $\overline{abc}$ există un număr $\overline{def}$, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

i) $\overline{abc} + \overline{def}$ este pătrat perfect;

ii) $a + d = n,\ b + e = n + 1,\ c + f = n + 2$.

Romanța Ghiță și *Ioan Ghiță*, Blaj **(S:E14.139)**

77. Fie x, y, z numere întregi care verifică relația $z^2 = x^2 + y^2$. Arătați că $4 \mid x$ sau $4 \mid y$.

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:E14.145)**

78. Să se arate că numărul $3^{3^{3n+1}} + 10$ este divizibil cu 13.

* * * **(S:E14.173)**

79. Arătați că numărul $\dfrac{n^3 + 6n^2 + 5n}{6}$ este natural, oricare ar fi n numărul natural.

* * * **(S:E14.184)**

80. Să se determine numerele naturale nenule a și b astfel încât $E(a,b) = a^2 \cdot 2^{3k-2} + 9b$ să se dividă cu 7, oricare ar fi $k \geq 1$, număr natural.

* * * **(S:E14.199)**

81. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu P_n produsul divizorilor naturali ai numărului *n*. Să se determine *n* cu proprietatea că $P_n = 6^{1575}$.

* * * **(S:E14.212)**

82. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, scrise în sistemul zecimal pentru care:

$$\overline{abc} + a + b + c = p^3,\ p \in \mathbb{N}.$$

* * * **(S:E14.218)**

83. Să se determine cifra *x* pentru care numărul $N = \overline{2014x11}$ să se dividă cu 17.

* * * **(S:E14.220)**

84. Demonstrați că printre 2025 de numere naturale distincte există 729 de numere a căror sumă este divizibilă cu 9.

Carmen Botea și *Viorel Botea*, Brăila **(S:E14.224)**

85. Arătați că dacă $2^m + 2^n$ este număr prim, atunci:

$$(m,n) \in \left\{(0,0),(2^k,0),(0,2^k) \mid k \in \mathbb{N}\right\}.$$

* * * **(S:E14.233)**

86. Se consideră mulțimea $A = \{p \mid p$ număr prim și $p^2 + 2$ număr prim$\}$. Câte elemente are mulțimea *A*?

Ovidiu Bobb, Copalnic-Mănăștur, Maramureș **(S:E15.14)**

87. Să se arate că dacă *p* este număr prim și $p^2 + p + 13$ este pătrat perfect, atunci numărul $p^3 + p + 13$ este număr prim.

Georgeta Burtea, Alexandria **(S:E15.94)**

88. Se consideră numărul $a_n = 18\underbrace{77...77}_{n}889$, cu n număr natural, şi c_n câtul împărţirii numărului a_n la 13.

a) Să se arate că a_n se divide cu 13 pentru oricare n.

b) Să se determine n pentru care $s(a_n) = 2s(c_n)$, unde $s(m)$ reprezintă suma cifrelor numărului m.

Marius Burtea, Alexandria **(S:E15.107)**

89. Un număr natural n este *puternic* dacă are proprietatea: dacă un număr prim p divide n, atunci p^2 divide n. Găsiţi numerele *puternice* de trei cifre care au exact şase divizori.

George-Florin Şerban, Brăila **(S:E15.132)**

90. Determinaţi numerele de forma $\overline{abab}$ care au exact şase divizori naturali.

George Florin Şerban, Brăila **(S:E15.133)**

91. Fie numerele naturale nenule a, b, c, d, e astfel încât:

$$(a+b)(a+c)(a+d)(a+e) = 5005.$$

Arătaţi că numerele a, b, c, d, e nu pot fi toate numere prime.

Daniel Sitaru, Drobeta-Turnu Severin **(S:E15.134)**

92. Determinaţi numerele naturale $a < b < c$, ştiind că $(a, b, c) = 3$ şi $[a, b, c] = 30$. (Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y şi $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor x şi y.)

Vasile Scurtu, Bistriţa **(S:E15.137)**

93. Fie $A = 2a + 3b + 4c$ şi $B = 7a + 8b + 9c$, unde a, b, c sunt numere naturale nenule. Arătaţi că 5 divide A dacă şi numai dacă 5 divide B.

Vasile Scurtu, Bistriţa **(S:E15.138)**

94. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale de la 1 până la 50. La pasul 1 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor minus 2. La pasul 2 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor mărită cu 1. La pasul 3 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor minus 2. La pasul 4 se şterg două numere şi se înlocuiesc cu suma lor mărită cu 1. Se continuă în acelaşi fel până la pasul 48 când pe tablă rămân două numere. Aflaţi suma celor două numere.

Concursul „Laurenţiu Panaitopol", Giurgiu, 2015 **(S:E15.171)**

95. Aflaţi suma celor mai mici 32 de numere naturale a care împărţite la numărul natural $n > 1$ dau restul egal cu 1, iar împărţite la n^2 dau restul egal cu $n - 1$.

Iulian Bunu, Baia Mare **(S:E15.212)**

96. Arătaţi că numărul $a = 30 + 2^{2015}$ se divide cu 62.

Mihai Vijdeluc şi *Vasile Ienuţaş*, Baia Mare **(S:E15.213)**

97. Câte numere prime de trei cifre se transformă în cuburi perfecte dacă schimbăm ordinea cifrelor lor?

Vasile Ienuţaş, Baia Mare **(S:E15.216)**

98. Fie numărul $A = \underbrace{155155155...155}_{2016 \text{ cifre}}$. Arătaţi că A este divizibil cu 2015.

Vasile Ienuţaş şi *Mihai Vijdeluc*, Baia Mare **(S:E15.218)**

99. Aflați valorile lui n, număr natural nenul, pentru care numerele 2015^{n^2} și 2015^n au ultimele patru cifre identice.

George Florin Şerban, Brăila **(S:E15.253)**

100. Fie mulțimile nevide A şi B cu proprietățile $A \cap B = \varnothing$ şi $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 2014\}$.

a) Să se arate că suma dintre numerele pare din A și numerele impare din B nu este egală cu suma dintre numerele pare din B și numerele impare din A.

b) Dacă A conține cel puțin 1008 elemente, atunci conține cel puțin două numere consecutive.

Carmen Botea şi *Viorel Botea*, Brăila **(S:E15.260)**

101. Arătați că dacă a, b, c, d, e sunt numere naturale prime diferite, atunci:

$$abcd + bcde + cdea + deab + eabc + 1693 \le 2abcde.$$

Aurel Doboşan, Lugoj **(S:E15.293)**

102. Aflați cel mai mare număr natural n pentru care 7^n divide $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2015$.

Aurel Doboşan, Lugoj **(S:E15.294)**

103. Aflați numerele prime a, b, c care verifică simultan relațiile:

$$c - ab = 15 \text{ şi } c - a^2 = 49.$$

Eugen Predoiu, Călăraşi **(S:E15.337)**

104. Fie $A = 3a + 5b$ şi $B = 2a + 3b$, unde a şi b sunt numere naturale nenule. Arătați că $(A, B) = (a, b)$. Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Vasile Scurtu, Bistrița **(S:E15.338)**

105. Arătați că $239 \mid \overline{XFACTOR}$ dacă şi numai dacă:

$$239 \mid \overline{FACTORX}.$$

* * * **(S:E16.12)**

106. O mulțime de numere naturale A cu cel puțin două elemente, o numim ideală dacă pentru orice $a, b \in A$ avem $a \mid b$ sau $b \mid a$.

a) Construiți o mulțime ideală cu 3 elemente.

b) Arătați că dacă $p \ge 2$ este un număr prim, atunci mulțimea divizorilor numărului p^n este ideală, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați o mulțime ideală cu 8 elemente ştiind că suma elementelor sale este 255.

* * * **(S:E16.14)**

107. Arătați că numărul $a = (2n+1)(3n+2)$ nu este pătrat perfect, oricare ar fi n număr natural.

* * * **(S:E16.54)**

108. Determinați numărul prim x ştiind că a, b sunt numere naturale pentru care:

$$x + a^3 + b^3 = a + b + 219.$$

* * * **(S:E16.56)**

109. Arătați că pentru orice număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ există un număr $\overline{xyzt}$ astfel încât cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{xyztabc}$ şi $\overline{abcxyzt}$ să fie $\overline{abc}$.

* * * **(S:E16.58)**

110. Suma a 2016 numere naturale consecutive este un număr divizibil cu 2015. Arătați că două dintre aceste numere sunt divizibile cu 2015.

* * * **(S:E16.95)**

111. Demonstrați că numărul:

$$a = 2^{n+4} \cdot 3^{n+5} + 2^{n+5} \cdot 3^{n+2} + 6^{n+3} \cdot 4,$$

unde n este un număr natural nenul, se divide cu 2016.

* * * **(S:E16.99)**

112. Stabiliți dacă numărul $a = 10^{2016} - 2^{10}$ este pătrat perfect.

* * * **(S:E16.138)**

113. Determinați *n* număr natural pentru care numerele naturale:

$$n-5, n-1, n+3, n+5, \ n+9 \text{ și } n+11$$

sunt simultan numere prime.

* * * **(S:E16.140)**

114. Determinați cel mai mic număr cu 30 cifre, care are suma cifrelor 30 și se divide cu 30.

* * * **(S:E16.178)**

115. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ numerele naturale astfel încât $3 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{13}$ și $x_1 + x_2 + \ldots + x_{13} = 174$. Arătați că cel puțin unul dintre cele 13 numere este prim.

* * * **(S:E16.180)**

116. Arătați că numărul $3^{2015} + 10$ este divizibil cu 11.

* * * **(S:E16.181)**

117. Aflați numerele naturale nenule *a*, *b*, *c* știind că $\{2, a, b\} = \{7, a^2, c\}$.

Gheorghe Gherasin, Sighetu Marmației **(S:E09.11)**

118. Se dau mulțimile $A = \{x \mid x = 2k+5, k \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{y \mid y = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\}$, în care elementele sunt ordonate crescător.

a) Scrieți primile trei elemente din cele două mulțimi.

b) Verificați dacă $547 \in A$ și $547 \in B$.

c) Găsiți cel de-al 30-lea termen al lui *A*.

d) Arătați că cele două mulțimi sun disjuncte.

Simona Muscariu, Târgoviște **(S:E09.46)**

119. Determinați $a, b, c \in \mathbb{N}$ dacă:

i) $\{2005, 2009\} \cup \{a, b\} = \{2005, 2007, 2009\}$;

ii) $\{2007, 2009\} - \{b, c\} = \{2009\}$;

iii) $\{a, c\} = \{2005, 2009\}$.

Vasile Tarciniu, Odobești **(S:E09.208)**

120. Se consideră mulțimea $M = \{x^4 \mid x \in \{1, 2, \ldots, 10\}\}$. Determinați numărul minim de elemente care trebuie alese arbitrar din *M*, pentru a fi siguri că există două elemente alese având diferența divizibilă cu 10.

Cristian Lazăr, Iași **(S:E11.10)**