Marius PERIANU
Cătălin STĂNICĂ
Ştefan SMĂRĂNDOIU

Matematică

clasa a V-a

Semestrul I

art
educațional

CUPRINS

Unitatea 1. Numere naturale

Unitatea 2. Metode aritmetice de rezolvare a problemelor

UNITATEA 1
NUMERE NATURALE

Tema 1.1

Scrierea şi citirea numerelor naturale

Scrierea. Pentru scrierea unui număr natural, se folosesc unul sau mai multe din următoarele zece simboluri, numite *cifre arabe*:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Fiecare număr se scrie ca o succesiune de cifre, care se pot repeta, prima cifră a unui număr natural de cel puțin două cifre fiind diferită de 0. De asemenea, fiecare succesiune de cifre reprezintă un număr.

Acest mod de scriere a unui număr natural se numeşte *sistem zecimal*, sau *în baza zece*, pentru că zece unități de un anumit ordin formează o unitate de ordin imediat mai mare.

Citirea. Pentru a citi un număr natural, grupăm cifrele câte trei de la dreapta spre stânga. Aceste grupe se numesc clase. Fiecare clasă se compune din unități, zeci şi sute. În ordine de la dreapta la stânga avem: clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor, clasa miliardelor etc. Din acest motiv, scrierea numerelor în baza zece este o scriere *pozițională*, deoarece fiecare cifră are o anumită valoare după locul unde este scrisă.

Exemplu. În numărul 23 472 508 216, cifra 2 apare de trei ori, de la dreapta spre stânga şi ea are următoarele valori: sute, milioane şi respectiv zeci de miliarde.

sute de miliarde	zeci de miliarde	miliarde	sute de milioane	zeci de milioane	milioane	sute de mii	zeci de mii	mii	sute	zeci	unități
	2	3	4	7	2	5	0	8	2	1	6
	clasa *miliardelor*			clasa *milioanelor*			clasa *miilor*			clasa *unităților*	

Descompunerea zecimală. Orice număr natural de două sau mai multe cifre se scrie în mod unic sub forma unei sume de produse între fiecare cifră din scrierea numărului şi numărul ce indică ordinul cifrei respective (1, 10, 100, 1 000 etc.).

Exemple

1. $37 = 3 \cdot 10 + 7$
2. $275 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$
3. $8086 = 8 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 6$

Cazul general

$\overline{ab} = 10 \cdot a + b$

$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$

$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$

Observaţie. Numărul de numere naturale n cuprinse între două numere naturale a şi b date:
– de la 1 la n sunt n numere naturale, iar de la 0 la n sunt $n+1$ numere naturale;
– în general, de la a la b (incluzându-le pe a şi b) sunt $b-a+1$ numere naturale.

*

1. Citiți numerele:
a) 123 000 456; *b)* 985 420; *c)* 203 005 023;
d) 987 654 321; *e)* 100 005; *f)* 403 067;
g) 98 700 654; *h)* 120; *i)* 202 022.

2. Scrieți în baza zece, numerele:
a) treizeci şi nouă; *b)* două sute patruzeci; *c)* două mii trei;
d) nouă mii nouă sute; *e)* o mie şapte sute cinci; *f)* trei milioane o sută;
g) trei mii; *h)* trei mii două sute trei; *i)* două sute şaisprezece.

3. Scrieți în baza zece, numerele:
a) trei milioane cinci sute nouăzeci şi şapte de mii douăzeci şi doi;
b) opt milioane patru sute trei mii cinci sute treizeci şi cinci;
c) treizeci şi şapte de milioane optzeci de mii şase;
d) patru sute patruzeci şi trei de mii opt sute unu.

4. *a)* Scrieți patru numere impare cu suma cifrelor 3.
b) Scrieți trei numere impare cu produsul cifrelor 8.
c) Scrieți patru numere pare cu suma cifrelor 12.

5. *a)* Scrieți 4 numere pare, având suma cifrelor 3.
b) Scrieți 4 numere impare de două cifre, având diferența cifrelor egală cu 1.

6. Dați trei exemple de numere naturale de forma $\overline{abcdcba}$ şi apoi citiți-le.

7. Determină câte numere cuprinse între 41 şi 80 conțin:
a) cifra 6; *b)* cifra 4; *c)* două cifre consecutive;
d) cifrele 4 sau 8; *e)* o cifră pară; *f)* două cifre impare.

8. *a)* Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele naturale până la 20 inclusiv?
b) Câte cifre se folosesc pentru a scrie toate numerele de la 1 la 35, inclusiv 1 şi 35?
c) De câte ori se utilizează cifra 5 pentru a scrie toate numerele naturale de 3 cifre?

9. Câte numere naturale, cuprinse între 500 şi 550, conțin:
a) cifra 3; *b)* două cifre identice; *c)* cifrele 0 sau 7?

Rezolvare. *a)* Numerele care conțin cifra 3 sunt: 503, 513, 523, 543 şi 530, 531, 532, ..., 539. În total sunt 14 numere.

**

10. *a)* Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{abc} = 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1$.
b) Determinați cifrele a, b, c ştiind că $634 = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$.
c) Determinați cifrele a, b, c, d ştiind că $\overline{4a5c} = b \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + d \cdot 10 + 9$.
d) Determinați cifrele a, b, c, d ştiind că $\overline{ab2d} = b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + a$.

11. *a)* Determinați numerele de forma $\overline{a2b5}$ ştiind că produsul cifrelor sale este 120.
b) Determinați numerele de forma $\overline{11a3b7}$ ştiind că suma cifrelor sale este 17.

12. ***a)*** Aflați numerele naturale $\overline{ab}$ pentru care $\overline{a2b} = \overline{2ba}$.

b) Aflați numerele naturale $\overline{abc}$ pentru care $\overline{a4bc} = \overline{cbaa}$.

c) Câte numere naturale $\overline{abcd}$ verifică egalitatea $\overline{a7bd} = \overline{cadb}$?

13. ***a)*** Aflați cifrele a şi b ştiind că răsturnatul numărului $\overline{a4}$ este $\overline{b5}$.

b) Aflați cifrele a, b, c ştiind că răsturnatul numărului $\overline{5ab4}$ este $\overline{403c}$.

c) Aflați cifrele a, b, c şi d ştiind că răsturnatul numărului $\overline{abc6}$ este $\overline{bcb3}$, iar răsturnatul numărului $\overline{3bcd}$ este $\overline{90ba}$.

14. ***a)*** Câte numere naturale sunt de la 1 la 34? Dar de la 0 la 25? Dar de la 7 la 28?
b) Câte numere naturale sunt de la 1 la 9? Dar de la 11 la 75? Dar de la 111 la 211?

Rezolvare. ***a)*** De la 1 până la 34 sunt 34 numere naturale. De la 0 până la 25 sunt 26 numere naturale. De la 7 până la 28 sunt $28 - 7 + 1 = 22$ numere naturale.

15. ***a)*** Câte numere pare şi câte impare sunt de la 127 până la 579?
b) Determinați câte numere pare sunt de la 444 până la 2 012.

Rezolvare. ***a)*** Numerele care trebuie *numărate* se repetă din 2 în 2. Vom utiliza un *contor de numărare*.[1] Numerele pare cuprinse între 127 şi 579 sunt $128 = 2 \cdot \mathbf{64}$, $130 = 2 \cdot \mathbf{65}$, ..., $578 = 2 \cdot \mathbf{289}$, adică sub forma $2k$, unde k (pe care îl vom numi ***contor***) ia valori consecutive de la 64 la 289.

Problema se reduce la aflarea numărului de valori pe care le ia contorul, deci trebuie să găsim câte numere naturale sunt de la 64 până la 289, adică $289 - 64 + 1 = 226$ numere.

În acelaşi fel, numerele impare de la 127 până la 579 se pot scrie: $127 = 2 \cdot \mathbf{63} + 1$, $129 = 2 \cdot \mathbf{64} + 1$, $131 = 2 \cdot \mathbf{65} + 1$, ..., $577 = 2 \cdot \mathbf{287} + 1$, $579 = 2 \cdot \mathbf{289} + 1$, deci contorul k ia valori de la 63 la 289. Ca urmare, între 127 şi 579 sunt $289 - 63 + 1 = 227$ numere pare.

16. ***a)*** Scrieți primele 12 numere din şirul numerelor naturale.
b) Care este al 57-lea număr natural din şirul numerelor naturale nenule?
c) Care este al 33-lea număr par din şirul numerelor naturale nenule?
d) Care este al 257-lea număr natural par din şirul numerelor naturale?
e) Care este al 138-lea număr natural impar din şirul numerelor naturale?

Rezolvare. ***c)*** Cum şirul numerelor naturale nenule este 1, 2, ..., n, ... , iar numerele pare nenule sunt de forma $2 \cdot k$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că al 33-lea număr par nenul este $2 \cdot 33 = 66$.

17. Pe ecranul calculatorului sunt scrise toate numerele de la 600 la 2 013. Alin utilizează un program care şterge de pe ecran numerele pare. Câte numere rămân pe ecran?

18. Aflați câte numere se găsesc în fiecare dintre secvențele:

a) 1, 2, 3, ..., 30 ;	***b)*** 10, 11, 12, ..., 30 ;	***c)*** 2, 4, 6, 8, ..., 200 ;
d) 0, 1, 2, 3, ..., 19 ;	***e)*** 17, 18, 19, ..., 156 ;	***f)*** 11, 13, 15, 17, ..., 137 ;
g) 15, 20, 25, ..., 125 ;	***h)*** 9, 12, 15, ..., 249 ;	***i)*** 6, 12, 18, ..., 660.

19. ***a)*** Câte numere impare se găsesc în şirul: 5, 6, 7, 8, ..., 20?

[1] Metoda contorului de numărare se utilizează, în general, pentru determinarea numărului de termeni ai unei secvențe de numere naturale care se obțin numărând din r în r începând de la primul termen al secvenței, unde r este un număr natural nenul dat. Vom învăța că o astfel de secvență se numeşte *progresie aritmetică*, iar r se numeşte rația progresiei.

b) Câte numere pare se găsesc în şirul: 2, 4, 6, 8, ..., 80?
c) Câte numere pare se găsesc în şirul: 7, 14, 21, 28, ..., 140?
d) Câte numere impare se găsesc în şirul: 5, 10, 15, 20, ..., 215?

20. Pentru fiecare din şirurile de mai jos observaţi regula de alcătuire şi scrieţi încă trei numere:
a) 8, 14, 20, ..., ..., ... *b)* 12, 23, 34, ..., ..., ... *c)* 13, 35, 57, ..., ..., ...
d) 1, 4, 16, ..., ..., ... *e)* 5, 11, 23, ..., ..., ... *f)* 7, 20, 59, ..., ..., ...

21. *a)* Câte numere de două cifre există? Câte numere impare de trei cifre există?
b) Aflaţi câte numere de două cifre distincte există.
c) Determinaţi numărul de numere pare de forma $\overline{ab5c}$.
d) Determinaţi câte numere pare sunt de forma $\overline{2ab6c}$.

Rezolvare. *a)* Prima cifră a unui număr de două cifre $\overline{ab}$ poate fi oricare cifră de la 1 până la 9, adică se poate alege în 9 moduri. Pentru a doua cifră sunt 10 posibilităţi de alegere, adică oricare dintre cifrele de la 0 până la 9. Pentru fiecare cifră a putem scrie oricare din cele 10 cifre b, deci vor fi $9 \cdot 10 = 90$ numere naturale diferite.

Dacă $\overline{abc}$ este un număr impar, atunci cifra a poate lua 9 valori, cifra b 10 valori, iar cifra c 5 valori (1, 3, 5, 7 sau 9), deci sunt $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ numere impare de trei cifre.

Metoda folosită mai sus se numeşte:

Regula produsului. Numărul numerelor de n cifre cu proprietatea că pentru cifra de pe poziţia k (unde $k = 1, 2, \ldots, n$) există a_k posibilităţi de alegere, independente de alegerile cifrelor anterioare, este egal cu $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

22. Utilizând, eventual, regula produsului descrisă mai sus, determinaţi:
a) câte numere de trei cifre se pot forma, folosind numai cifrele 5 şi 7;
b) câte numere de trei cifre se pot forma, folosind numai cifrele 2, 3 şi 4;
c) câte numere impare de patru cifre se pot forma cu numerele 1, 2, 3 şi 4.

23. *a)* Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu cifrele 2, 5 şi 8?
b) Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu cifrele 0, 2, 7?

24. Determinaţi:
a) Câte numere naturale de 6 cifre încep cu 123?
b) Câte numere naturale de 6 cifre se termină cu 123?
c) Câte numere naturale de 6 cifre conţin secvenţa de cifre 123?
d) Câte numere naturale de 6 cifre distincte se termină cu 123?

25. *a)* Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărţi cu 100 de pagini?
b) Pentru numerotarea paginilor unei culegeri de matematică s-au folosit 450 cifre. Câte pagini are culegerea?

26. *a)* Câte cifre s-au folosit pentru numerotarea unei cărţi cu 1024 de pagini?
b) Pentru numerotarea paginilor unei enciclopedii s-au utilizat 3389 cifre. Câte pagini are enciclopedia?

27. *a)* Câte numere impare se găsesc în şirul: 17, 18, 19, ..., 173?
b) Câte numere pare se găsesc în şirul: 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 300?
c) Câte numere conţine următorul şir: 11, 16, 21, ..., 2 011?

***

28. Determinați:
a) de câte ori se folosește cifra 3 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 100;
b) de câte ori se folosește cifra 1 în scrierea numerelor naturale de la 1 la 1 000.

29. *a)* Câte numere naturale de forma $\overline{aba}$ cu $a \neq 0$ și $a \neq b$ există?
b) Câte numere naturale au forma $\overline{abcabc}$, cu $a \neq 0$ și $a \neq b \neq c \neq a$?
c) Câte numere naturale sunt de forma $\overline{abc}$, cu $a \neq 0$ și $a < b < c$?

30. *a)* Câte numere naturale au forma $\overline{abcd}$, cu $a \neq 0$ și $a > b > c > d$?
b) Câte numere naturale impare sunt de forma $\overline{abcd}$ cu $a \neq 0$ și $a > b > c > d$?
c) Câte numere naturale sunt de forma $\overline{abc}$ și au produsul cifrelor număr impar?

31. *a)* Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + c = 3$.
b) Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, știind că $a + c = 6 \cdot b$.

32. Determinați cifrele *a*, *b*, *c*, *d*, *e* știind că $\overline{abcda}$, $\overline{a4c7b}$ și $\overline{2b5de}$ sunt numere naturale pare consecutive.

33. Aflați numărul perechilor de numere naturale consecutive de forma $\overline{ab3}$, $\overline{ca4}$.

Probleme de șapte stele

34. Se construiește numărul natural 35355355535555... după regula: după primul trei se scrie un cinci, după al doilea trei doi de cinci, după al treilea trei se scriu trei de cinci ș.a.m.d.
a) Care este cifra de pe poziția 21?
b) A câta cifră a numărului va fi a zecea cifră de 3?

35. Determinați al 13-lea număr din șirul de numere: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Indicație. Observați legătura între fiecare termen, începând cu al treilea, și cei doi termeni anteriori.

36. Aflați câte numere au în comun șirurile 10, 15, 20, ..., 2010 și 10, 14, 18, ..., 2010.

37. Determinați numărul termenilor secvenței

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, ..., 2513.$$

38. Determinați cifra de pe poziția 2017 a numărului:

$$A = 12\,22\,223\,2224\,22225\,22222....2011\underbrace{222...2}_{2011 \text{ cifre}}.$$

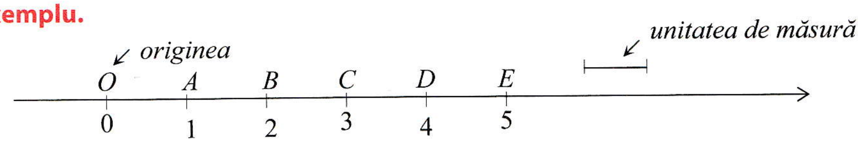
Tema 1.2

Reprezentarea numerelor naturale pe axa numerelor. Compararea numerelor naturale. Aproximări

Axa numerelor. O dreaptă pe care se fixează un punct, numit *origine*, un sens de deplasare şi un segment numit *unitate de măsură* se numeşte *axa numerelor.*

Fiecărui număr natural îi corespunde, pe axă, un punct. Numărul respectiv se numeşte *coordonata punctului.* Originea are coordonata 0 (zero).

Exemplu.



Compararea numerelor naturale. Dintre două numere naturale care au un număr diferit de cifre este mai mare numărul care are mai multe cifre. Dintre două numere naturale, care au acelaşi număr de cifre, numărul mai mare este cel la care întâlnim prima cifră mai mare, când comparăm cifrele de acelaşi ordin de la stânga la dreapta. Semnele folosite în compararea numerelor sunt: $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Observaţie. Dintre două numere naturale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este cel reprezentat în dreapta celuilalt.

Aproximări, rotunjiri, estimări. Uneori, nu este necesar să ştim exact toate cifrele unui număr, ci numai ordinul său de mărime. Spre exemplu, dacă la un concert participă 2103 spectatori, o cronică a concertului va menţiona că au luat parte *aproximativ* 2000 de spectatori (un număr mai uşor de reţinut decât 2103).

Atunci când utilizăm, în locul unui număr natural dat, un alt număr, apropiat de el, se spune că am folosit o *aproximare* a numărului respectiv. Există trei tipuri de aproximări: prin lipsă, prin adaos şi prin rotunjire.

Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mare număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.), mai mic sau egal cu numărul respectiv.

Aproximarea prin adaos a unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este cel mai mic număr natural format numai din zeci (sute, mii etc.), strict mai mare decât numărul respectiv.

Rotunjirea unui număr natural la ordinul zecilor (sutelor, miilor etc.) este aproximarea la ordinul considerat, prin lipsă sau prin adaos, cea mai apropiată de numărul respectiv. În cazul în care cele două aproximări sunt la fel de apropiate de număr, pentru rotunjire se ia în considerare aproximarea prin adaos.

Observaţia 1. Aproximarea prin lipsă a unui număr natural la ordinul zecilor se obţine înlocuind ultima cifră a numărului (cifra unităţilor) cu zero, aproximarea prin lipsă la ordinul sutelor se face înlocuind ultimele două cifre ale numărului cu zero etc.

Observaţia 2. Un număr natural este mai mare sau egal cu orice aproximare a sa prin lipsă (de orice ordin) şi mai mic strict decât orice aproximare prin adaos.