Petre Năchilă

Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciţii şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a IV-a

Editura Nomina

CUPRINS

Capitolul 1. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ...5
1.1. METODA GRAFICĂ (METODA FIGURATIVĂ)....5
1.2. METODA COMPARAȚIEI....11
1.3. METODA FALSEI IPOTEZE....16
1.4. METODA MERSULUI INVERS....17
1.5. PROBLEME DE MIȘCARE....20
1.6. METODA ALGEBRICĂ (opțional)....23

Capitolul 2. TESTE GRILĂ....41

Capitolul 3. TESTE PENTRU CONCURSURI....59

Capitolul 4. TESTE PENTRU ADMITERE ÎN CLASA A V-A....96

SOLUȚII....121
Capitolul 1. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ....121
Capitolul 2. TESTE GRILĂ....127
Capitolul 3. TESTE PENTRU CONCURSURI....135
Capitolul 4. TESTE PENTRU ADMITERE ÎN CLASA A V-A....167

Capitolul 1

METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ

Acest capitol este destinat îndeosebi copiilor şi părinților. Vor fi prezentate cele mai importante metode de rezolvare a problemelor de aritmetică.

Prezentarea metodei este însoțită de exemple de probleme rezolvate, dar şi de probleme propuse.

Toate metodele prezentate sunt folosite şi în capitolele următoare ale cărții: teste de verificare a cunoştințelor, teste grilă, teste pentru concursuri.

1.1. METODA GRAFICĂ (METODA FIGURATIVĂ)

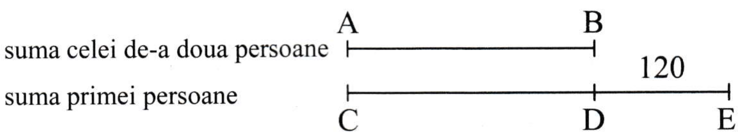
În aplicarea metodei grafice se poate apela la orice categorie de elemente grafice (segmente, cercuri, dreptunghiuri etc.). Folosirea unor anumite elemente grafice este impusă de natura datelor problemei, de accesibilitatea lor, dar mai ales de utilitatea acestora în rezolvarea problemelor.

1.1.a. DETERMINAREA (AFLAREA) NUMERELOR CUNOSCÂND SUMA ŞI DIFERENȚA LOR

1. Două persoane au împreuna 540 lei.

Să se afle ce suma are fiecare persoană, dacă prima persoană are mai mult decât a doua persoană cu 120 lei.

Soluție: Reprezentăm cele două mărimi care intervin (sumele celor două persoane) prin două segmente, din care unul are lungimea mai mare (suma primei persoane este mai mare cu 120 lei):



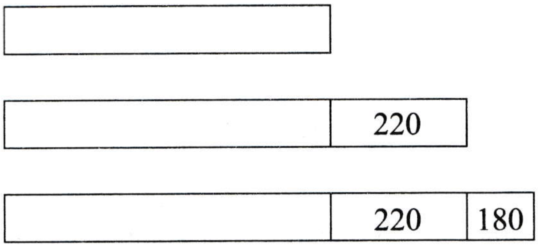
Diferența dintre lungimile segmentelor CE şi AB (adică segmentul DE) reprezintă diferența dintre cele două sume. Segmentul care reprezintă suma pe care o au împreună cele două persoane este format din două segmente de aceeaşi lungime (fiecare segment reprezintă suma celei de-a doua persoane) şi un segment ce reprezintă suma de 120 lei.

Suma celei de-a doua persoane este (540 – 120) : 2 = 210 (lei).
Suma primei persoane este 210 + 120 = 330 (lei) (sau 540 – 210 = 330).

2. Trei grădini au împreună o suprafaţă de 3320 m^2. A treia grădină este cu 220 m^2 mai mare decât a doua, iar prima grădină este cu 180 m^2 mai mare decât a treia.

Să se afle suprafaţa fiecărei grădini.

Soluţie: Suprafeţele celor trei grădini sunt reprezentate astfel:



Suprafaţa celei de-a doua grădini

Suprafaţa celei de-a treia grădini

Suprafaţa primei grădini

Suprafaţa celei de-a doua grădini se determină astfel:
220 + (220 + 180) = 620; (3320 – 620) : 3 = 900 m^2.
A treia grădina are: 900 + 220 = 1120 m^2, iar prima grădină are:
1120 + 180 = 1300 m^2.

OBSERVAŢIE: Dacă se cunosc suma S şi diferenţa D a două numere a şi b, $a \geq b$, atunci avem $a = (S + D) : 2$, $b = (S - D) : 2$.

Într-adevăr, avem $a + b = S$, $a - b = D$, de unde prin adunare, respectiv scădere rezultă că $2 \times a = S + D$, $2 \times b = S - D$.

1.1.b. DETERMINAREA A DOUĂ NUMERE CÂND SE CUNOSC SUMA ŞI RAPORTUL LOR

Prin raportul a două numere naturale a şi b, $b > 0$, înţelegem a : b. Raportul numerelor a şi b (în această ordine) se notează cu $\frac{a}{b}$.

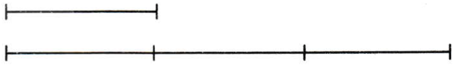
3. Suma a două numere este 224, iar unul din numere este de trei ori mai mare decât celălalt număr.

Să se determine cele două numere.

Soluție: Reprezentăm numerele astfel:

numărul mai mic

numărul mai mare



Suma celor două numere este dată de:

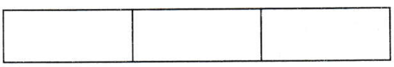
Numărul mai mic este: 224 : 4 = 56.

Numărul mai mare este: 56 × 3 = 168 (sau 224 – 56 = 168).

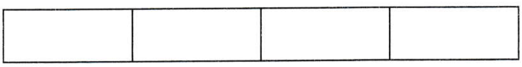
4. Un muncitor a săpat trei sferturi din cât a săpat alt muncitor, împreună au săpat 714 m.

Cât a săpat fiecare muncitor?

Soluție: Reprezentăm suprafețele săpate astfel:



suprafața săpată de primul muncitor



suprafața săpată de al doilea muncitor

Suprafața săpată de cei doi muncitori este suprafața a 4 + 3 = 7 dreptunghiuri egale.

Primul muncitor a săpat: 714 : 7 × 3 = 306 m^2.

Al doilea muncitor a săpat: 714 : 7 × 4 = 408 m^2 (sau 714 – 306 = 408 m^2).

OBSERVAȚIE

Dacă suma a două numere x şi y este S, iar raportul lor este a : b, atunci cele două numere sunt date de x = S : (a + b) × a şi y = S : (a + b) × b. Într-adevăr, avem S = x + y şi bx = ay. Înmulțind prima relație cu b, avem bS = bx + by = = ay + by = (a + b) × y. Obținem y = b × S : (a + b). Analog, înmulțind prima relație cu a, avem succesiv aS = ax + ay = ax + bx = (a + b) × x şi deci:

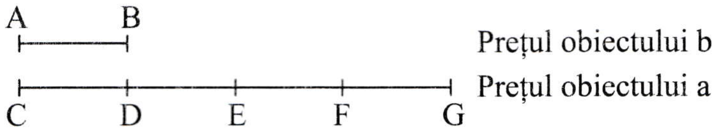
$$x = a \times S : (a + b).$$

1.1.c. DETERMINAREA A DOUĂ NUMERE CÂND SE CUNOSC DIFERENȚA ȘI RAPORTUL LOR

5. Un obiect a este de 4 ori mai scump decât un obiect b. Obiectul a a costat cu 369 lei mai mult decât obiectul b.

Să se determine cât costă fiecare obiect.

Soluție: Reprezentăm prețurile celor două obiecte astfel:

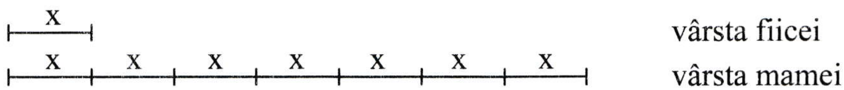


Prețul obiectului b este reprezentat prin segmentul AB, iar prețul obiectului a prin segmentul CG, care este format din patru segmente CD, DE, EF, FG care au aceeași lungime ca și segmentul AB. Diferența celor două prețuri este dată de segmentul DG, care are lungimea de trei ori mai mare decât segmentul AB. Obiectul b costă $369 : 3 = 123$ lei, iar obiectul a costă $123 \times 4 = 492$ lei.

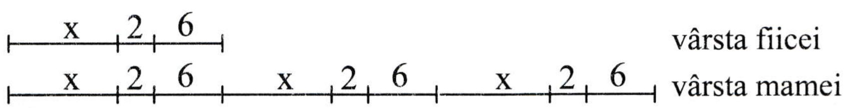
6. În urmă cu 2 ani, vârsta mamei era de 7 ori vârsta fiicei. Peste 6 ani, vârsta mamei va fi de trei ori vârsta fiicei.

Să se determine ce vârstă are fiecare.

Soluție: Vârstele fiicei și mamei în urmă cu doi ani sunt reprezentate astfel:



Peste 6 ani vârstele fiicei și mamei sunt reprezentate astfel:



Comparăm vârsta mamei de acum doi ani cu cea a mamei de peste 6 ani. Diferența acestor vârste este de 8 ani. Cu ajutorul „segmentelor” avem:

$7x + 2 + 6 = 3 \times (x + 2 + 6)$, de unde $7x - 3x = 24 - 8$, adică $x = 4$.

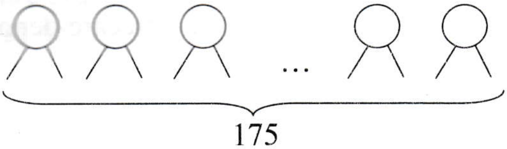
Fiica are 6 ani, iar mama are $7 \times 4 + 2 = 30$ ani.

1.1.d. ALTE PROBLEME REZOLVATE CU METODA FIGURATIVĂ

7. Într-o fermă sunt crescute găini şi oi. Numărul picioarelor este 450, iar numărul capetelor este 175.

Câte găini şi câte oi sunt în fermă?

Soluție: Fiecare vietate are 2 picioare sau 4 picioare. Figurăm fiecare vietate cu două picioare cu ajutorul unui cerc şi cu două segmente oblice:



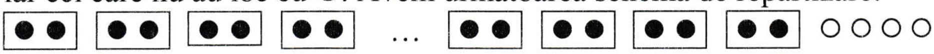
apar $175 \times 2 = 350$ picioare

\Rămân $450 - 350 = 100$ picioare, care reprezintă diferența de $4 - 2 = 2$ picioare pentru fiecare oaie. Numărul oilor este $100 : 2 = 50$, iar numărul găinilor $175 - 50 = 125$.

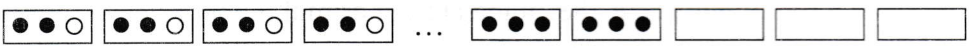
8. Dacă se aşază câte doi elevi într-o bancă, rămân 4 elevi. Dacă se aşază câte 3 elevi în bancă rămân 3 bănci libere.

Câți elevi şi câte bănci sunt?

Soluție: Reprezentăm grafic elevii care au loc în bănci în ambele variante cu ●, iar cei care nu au loc cu ○. Avem următoarea schemă de repartizare:



Completăm băncile de la doi elevi la trei elevi, luând cei patru elevi rămaşi, dar şi cu elevii în număr de 3×2 din băncile rămase libere. Avem următoarea repartizare:

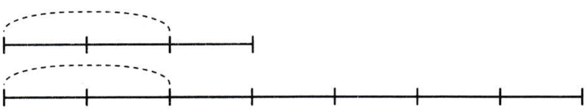


Avem $4 + 3 \times 2 + 3 = 13$ bănci şi $13 \times 2 + 4 = 30$ elevi.

9. Doi elevi au împreună suma de 120 lei.

Să se determine ce sumă are fiecare elev, dacă două treimi din suma unuia reprezintă două şeptimi din suma celuilalt.

Soluție: Folosim următoarea reprezentare grafică:



Suma pentru primul elev

Suma pentru al doilea elev

În total avem $3 + 7$ segmente egale (congruente). Fiecare segment reprezintă 120 lei $: 10 = 12$ lei.

Primul elev are $12 \times 3 = 36$ lei, iar al doilea elev are $12 \times 7 = 84$ lei.

Probleme propuse

1. Într-o livadă sunt 207 meri, peri şi pruni. Numărul merilor este cu 24 mai mic decât al prunilor, dar cu 39 mai mare decât al perilor.

Câți meri, peri, respectiv pruni sunt în livadă?

2. În trei depozite erau în total 200 de tone de zahăr. Din fiecare depozit s-a vândut aceeaşi cantitate de zahăr şi au rămas 25 de tone în primul depozit, 36 de tone în al doilea depozit şi 43 de tone în al treilea depozit.

Ce cantitate de zahăr a fost în fiecare depozit?

3. Trei grădini au împreună suprafața de 92 ha. Suprafața primelor două grădini este de 55 ha, iar a ultimelor două grădini de 63 ha.

Ce suprafață are fiecare grădină?

4. În două biblioteci sunt 440 de cărți. Într-o bibliotecă sunt cu 14 cărți mai mult decât dublul numărului de cărți din cealaltă bibliotecă.

Câte cărți sunt în fiecare bibliotecă?

5. Trei persoane au împreună suma de 720 lei. A doua persoană are de două ori mai mult decât prima persoană şi încă 50 lei. A treia persoană are de 3 ori mai mult decât primele două la un loc şi încă 40 lei.

Ce sumă are fiecare persoană?

6. Suma a trei numere este 288. Jumătate din primul număr este cât o treime din al doilea număr, respectiv cât un sfert din al treilea număr.

Să se afle numerele.

7. Bunica, mama şi fiica au împreună 87 ani. Peste 3 ani, mama va fi de 5 ori mai în vârstă decât fiica, iar bunica de două ori mai în vârstă decât mama.

Ce vârstă are fiecare?

8. Un turist a parcurs o distanță de 108 km pe jos şi cu maşina. Distanța parcursă pe jos reprezintă două şeptimi din distanța parcursă cu maşina.

Ce distanță a parcurs pe jos şi ce distantă a parcurs cu maşina?

9. Într-o cutie sunt de trei ori mai multe bile albe decât negre. Patru elevi iau câte o bilă albă şi câte o bilă neagră. Rămân în cutie de 4 ori mai multe bile albe decât bile negre.

Câte bile albe şi câte bile negre au fost inițial în cutie?

10. Un călător a parcurs un drum în trei zile astfel: în prima zi o treime din distanță, a doua zi un sfert din restul distanței rămase, iar în a treia zi cu 36 km mai mult decât în prima zi.

Să se determine ce distanță a parcurs în fiecare zi.

11. Un grup de fete şi băieți se aşază pe un rând astfel încât oricare 3 fete se află între grupe de câte doi băieți. Numărul total de copii este 147.

Să se determine numărul băieților şi numărul fetelor.

1.2. METODA COMPARAȚIEI

În problemele care se rezolvă prin metoda comparației intervin două sau mai multe mărimi variabile care iau diverse valori. Aceste mărimi sunt legate între ele prin relații (liniare) bine precizate.

Dacă valorile aceleiaşi mărimi sunt egale (din enunțul problemei), se reduc aceste mărimi (nu mai apar într-o nouă relație), prin scăderea relațiilor respective.

Dacă mărimile nu au valori egale din enunțul problemei, apare necesitatea aducerii la acelaşi termen de comparație. Acest lucru se realizează prin înmulțirea relațiilor date cu numere convenabil alese.

1.2.1. ELIMINAREA UNEI MĂRIMI PRIN REDUCERE

10. Un caiet, un pix şi un stilou costă împreună 16 lei. Un caiet, trei pixuri şi un stilou costă împreună 24 lei. Un caiet, un pix şi 4 stilouri costă împreună 46 lei.

Să se afle cât costă un caiet, cât costă un pix şi cât costă un stilou.

Soluție:

1 caiet................ 1 pix.................. 1 stilou...............16 lei (1)
1 caiet................3 pixuri .... 1 stilou...............24 lei (2)
1 caiet................ 1 pix.................. 4 stilouri ....46 lei (3)

Scăzând prima relație din a doua relație rezultă că $3 - 1 = 2$ pixuri costă $24 - 16 = 8$ lei. Un pix costă 4 lei.

Scăzând prima relație din a treia relație rezultă că $4 - 1 = 3$ stilouri costă $46 - 16 = 30$ lei. Un stilou costă 10 lei.

Un caiet costă $16 - 4 - 10 = 2$ lei.

11. Un caiet, 2 pixuri şi 3 stilouri costă împreună 40 lei. Trei caiete, un pix şi 2 stilouri costă împreună 30 lei. Două caiete, 3 pixuri şi un stilou costă împreună 26 lei.

Să se afle cât costă un caiet, cât costă un pix şi cât costă un stilou.

SOLUȚII

Capitolul 1. METODE DE REZOLVARE A PROBLEMELOR DE ARTIMETICĂ

1.1. METODA GRAFICĂ (FIGURATIVĂ)

1. 98 pruni, 74 meri, 35 peri; **2.** 57 tone, 68 tone, 75 tone; **3.** 29 ha, 26 ha, 37 ha; **4.** 142, 298; **5.** 40 lei, 130 lei, 550 lei; **6.** 64, 96, 128; **7.** 3 ani, 27 ani, 59 ani;
8. 24 km, 84 km; **9.** 36 bile albe, 12 bile negre; **10.** 72 km, 36 km, 108 km; **11.** 60 băieți, 87 fete.

1.2. METODA COMPARAȚIEI

1. 5 ℓ, 8 ℓ; **2.** 15 lei – cartea, 40 lei – stiloul; **3.** 4 km/h, 10 km/h, 50 km/h; **4.** 24 kg, 60 kg, 90 kg; **5.** 10 lei – cartea, 6 lei – penarul, 4 lei – pixul.

1.3. METODA FALSEI IPOTEZE

1. 12 bancnote de 5 lei şi 8 bancnote de 10 lei; **2.** 12 saci de 25 kg, 15 saci de 30 kg şi 24 saci de 35 kg; **3.** 284 kg şi 57 lăzi; **4.** 2 cu răspuns greşit, 15 cu răspuns corect, 3 fără răspuns.

1.4. METODA MERSULUI INVERS

1. 13; **2.** 360 kg; **3.** 31; **4.** 30 lei, 80 lei, 180 lei, 380 lei.

1.5. PROBLEME DE MIŞCARE

1. 360 km; **2.** 60 km/h; **3.** 15 m/s = 54 km/h, 20 m/s = 72 km/h; **4.** 30 km; **5.** 160 km, 165 km.

1.7. METODA REDUCERII LA ABSURD

1. Cea mai mică sumă a 60 de numere naturale nenule distincte este $1 + 2 + 3 + \ldots + 60 = 1830 > S$. Deci cel puțin două numere sunt egale. **2.** Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, numerele $2a + 4b - 1$ şi $4a + 6b + 3$ sunt numere impare şi deci produsul lor este număr impar. Cum 200 este număr par, numerele a şi b nu există.

3. Observăm că a, b, c sunt cifre nenule. Fie $n = a \cdot m + r_1$, $r_1 < a$; $n = b \cdot p + r_2$, $r_2 < b$; $n = c \cdot t + r_3$, $r_3 < c$. Deoarece $r_1 < 9$, $r_2 < 9$, $r_3 < 9$, avem $r_1 \leq 8$, $r_2 \leq 8$, $r_3 \leq 8$. Cum $r_1 + r_2 + r_3 = 23$, atunci pentru (r_1, r_2, r_3) avem tripletele (8, 8, 7), (8, 7, 8), (7, 8, 8). Atunci tripletele (a, b, c) nu pot fi decât (9, 9, 9), (9, 9, 8), (9, 8, 9), (8, 9, 9). Se arată că niciunul din numerele 999, 998, 989, 899 nu convine. **4.** După m modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m & m \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$. După alte n modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m & m \\ \hline n & n \\ \hline \end{array}$. După alte p modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m+p & m \\ \hline n+p & n \\ \hline \end{array}$. După alte r modificări de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array}$ obținem $\begin{array}{|c|c|}\hline m+p & m+r \\ \hline n+p & n+r \\ \hline \end{array}$. Avem $(m + p) + (n + r) = (n + p) + (m + r)$ (sume pe diagonale); a) Din $m + p = 5$, $m + r = 7$, $n + p = 6$, $n + r = 8$ avem $p = 5 - m$, $r = 7 - m$, $n = m + 1$. Avem $m = 0$, $n = 1$, $p = 5$, $r = 7$; b) Cum $102 + 99 \neq 100 + 100$, nu avem soluție. **5.** Fie $n = \overline{abcd}$, cu $a \neq 0$. Dacă $b = 0$ sau $c = 0$ sau $d = 0$, atunci în fiecare caz avem $n = \overline{a000}$. Presupunem $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Atunci avem $a \geq bcd$, $b \geq acd$, $c \geq abd$, $d \geq abc$. Prin înmulțirea inegalităților, notând $A = a \cdot b \cdot c \cdot d$, rezultă $A \geq A \cdot A \cdot A$ și deci $A \cdot A \leq 1$, de unde $A = 1$ și deci $n = 1111$. Avem maximul egal cu 9000.

1.8. PROBLEME DE NUMĂRARE

1. a) Sunt 9 pătrate de latură 1, 4 pătrate de latură 2 și 1 pătrat de latură 3. În total, sunt $9 + 4 + 1 = 14$ pătrate; b) Se află pe rând numărul pătratelor de latură 1, 2, 3, 4, respectiv 5. Sunt $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$ de pătrate. **2.** a) $8 + 5 = 13$; b) $(3 + 3 + 3) + (2 + 2 + 2 + 2) = 17$. **3.** $n = 2$ și $\overline{ab} = \overline{ba} \Rightarrow a = b \Rightarrow 9$ numere; $n = 3$ și $\overline{abc} = \overline{cba} \Rightarrow a = c \Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ de numere; $n = 4$ și $\overline{abcd} = \overline{dcba} \Rightarrow a = d$; $b = c \Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ de numere; $n = 5$ și $\overline{abcde} = \overline{edcba} \Rightarrow a = e$; $b = d \Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ de numere; $n = 6$ și $\overline{abcdef} = \overline{fedcba} \Rightarrow a = f$; $b = e$; $c = d \Rightarrow 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ de numere. **4.** Luăm numerele de $n = \overline{abc}$ în toate cazurile; a) a, b, c pot lua fiecare câte 3 valori. Atunci sunt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ de numere; b) b și c pot lua câte 3 valori, iar a poate lua 2 valori. În total sunt $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ numere; c) a, b, c pot lua 9 valori, 10 valori, respectiv 5 valori. Sunt $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ de numere. Altfel, sunt în total $999 - 99 = 900$ de numere de trei cifre, dintre care impare sunt $900 : 2 = 450$; e) Dacă $c = 0$, atunci a și b pot lua câte 9, respectiv 8 valori. Obținem $9 \cdot 8 = 72$ de numere. Dacă $c \neq 0$, atunci $c \in \{2, 4, 6, 8\}$. Dacă c este fixat, atunci a poate lua 8 valori, iar apoi dacă a și c sunt fixate, b poate lua 8 valori. Obținem $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ de numere. În total sunt $72 + 256 = 328$ de numere. **5.** a) $6 = 6 + 0 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = 2 + 4 = 1 + 5 = 0 + 6 \Rightarrow 7$ moduri; b) Fiecare înghețată din cele 6 este dată primului copil sau celui de-al doilea. În total sunt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$ moduri. **6.** $32 : 2 = 16$; $16 : 2 = 8$; $8 : 2 = 4$; $4 : 2 = 2$; $2 : 2 = 1$. S-au desfășurat $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ de partide. **7.** a) Avem 9 numere de o cifră, 90 de numere de două cifre, 900 de numere de 3 cifre și $2020 - 999 = 1021$ numere de 4 cifre. În total sunt $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1021 \cdot 4 = 6973$ cifre; b) Pentru numerele de maximum trei cifre s-au folosit 2889 cifre. Rămân $5000 - 2889 = 2111$ cifre pentru numere de 4 cifre. Deoarece $2111 = 4 \cdot 527 + 3$ și $999 + 527 = 1526$, atunci a 5000-a cifră este a treia cifră a numărului 1527, adică 2. **8.** Așezând o tură (de exemplu, albă) într-un pătrat, acesta atacă $7 + 7 + 1 = 15$ pătrate (am socotit și pătratul pe care se află). Cealaltă tură poate fi așezată în celelalte $64 - 15 = 49$ pătrate. Sunt $64 \cdot 49 = 3136$ moduri. **9.** Notăm lungimile laturilor cu $a \geq b$. a) Din $2 \cdot (a + b) = 24$ rezultă $a + b = 12$. Avem 6 cazuri date de $(a, b) \in \{(11; 1), (10; 2), (9; 3), (8; 4), (7; 5), (6; 6)\}$; b) Din $a \cdot b = 24 \Rightarrow (a, b) \in \{(24; 1), (12; 2), (8; 3), (6; 4)\}$, adică 4 cazuri. **10.** Fie $n = \overline{abcd}$. Cum $a \neq 0$, atunci avem și $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$. Luăm cazul $a \leq b \leq c \leq d$. Avem atunci $\alpha = abc \leq 9$. Dacă $a \geq 3$, nu avem soluție. Dacă $a = 2$, avem $n = 2228$. Dacă $a = 1$, avem numerele $\overline{111a}$, cu $a \geq 1$; 1224; 1236; 1248. Efectuând permutările numerelor, avem total $4 + (1 + 8 \cdot 3) + 24 : 2 + 24 + 24 = 89$ numere. **11.** Avem $r = np = m \cdot n \cdot n \leq 9$. Atunci avem $n \leq 3$. Dacă $n = 1$, avem numerele $\overline{m1mm}$ cu $1 \leq m \leq 9$. Dacă $n = 2$, avem $p = 2m$, $r = 4m$, cu $m \in \{1, 2\}$. Dacă $n = 3$, avem $A = 1339$. În total sunt 12 numere. **12.** a) Cifra 1 este urmată de 2 cifre de 2, apoi este cifra 1 urmată de 3 cifre de 3 până la cifra 1 urmată de 9 cifre de 9; b) Numărul cifrelor lui A este $(1 + 2) + (1 + 3) + (1 + 4) + \ldots (1 + 9) = 3 + 4 + 5 + \ldots + 10 = 52$; c) Avem $3 + 4 + 5 + 6 = 18$. Pe poziția 20 se află cifra 6. Pe pozițiile 37 și 46 se află 8 și respectiv 9. Avem $6 + 8 + 9 = 23$. **13.** Grupăm termenii șirului câte 4 astfel (1, 4, 2, 3), (5, 8, 6, 7), (9, 12, 10, 11), (13, 16, 14, 15). Pe locurile 1, 2, 3, 4 din fiecare grupă sunt numere de forma