

Exerciții și probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a V-a

Ediția a III-a revizuită și adăugită

| | |
|--|-----|
| Capitolul 1. NUMERE NATURALE | 5 |
| Probleme propuse | 6 |
| Capitolul 2. MULȚIMI | 11 |
| Probleme propuse | 12 |
| Capitolul 3. DIVIZIBILITATE | 15 |
| Probleme propuse | 17 |
| Capitolul 4. NUMERE RAȚIONALE POZITIVE | 25 |
| Probleme propuse | 27 |
| Capitolul 5. FRACTII ZECIMALE | 34 |
| Probleme propuse | 35 |
| Capitolul 6. ECUAȚII. INECUAȚII. INEGALITĂȚI | 37 |
| Capitolul 7. TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ | 47 |
| 7.1. Probleme distractive. Probleme de numărare | 47 |
| 7.2. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte | 49 |
| Probleme propuse | 50 |
| 7.3. Sisteme de numerație. Proprietatea fundamentală a sistemelor de numerație | 52 |
| Probleme propuse | 53 |
| 7.4. Prinzipiul cutiei (prinzipiul lui Dirichlet). Metoda reducerii la absurd | 54 |
| Probleme propuse | 54 |
| 7.5. Criterii de divizibilitate | 56 |
| Probleme propuse | 57 |
| 7.6. Numărul divizorilor și suma divizorilor unui număr natural dat | 59 |
| Probleme propuse | 59 |
| 7.7. Ecuații în numere naturale | 61 |
| Probleme propuse | 61 |
| 7.8. Mulțimi. Partiții ale unei mulțimi | 62 |
| Probleme propuse | 62 |
| SOLUȚII | 65 |
| Capitolul 1. Numere naturale | 65 |
| Capitolul 2. Mulțimi | 72 |
| Capitolul 3. Divizibilitate | 75 |
| Capitolul 4. Numere raționale pozitive | 91 |
| Capitolul 5. Fracții zecimale | 102 |
| Capitolul 6. Ecuații. Inecuații. Inegalități | 106 |
| Capitolul 7. Teme pentru cercurile de matematică | 124 |
| BIBLIOGRAFIE | 142 |

Capitolul 1

NUMERE NATURALE

Definiție. Numărul natural a este mai mare decât numărul b dacă există numărul natural c ≥ 1 , astfel încât $a = b + c$.

Avem $a > b$ dacă există $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = b + c$.

Avem $a \geq b$ dacă există $c \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b + c$.

Proprietăți ale relației „ \leq ” și „ $<$ ”.

1) reflexivitate: $a \leq a$, $(\forall) a \in \mathbb{N}$.

2) antisimetrie: $a \leq b$ și $b \leq a \Rightarrow a = b$.

3) tranzitivitate: $a \leq b$ și $b \leq c \Rightarrow a \leq c$; $a < b$ și $b < c \Rightarrow a < c$.

4) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$; $a - d \leq b - d$, $(\forall) c \in \mathbb{N}$, $(\forall) d \in \mathbb{N}$, $d \leq a$.

5) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$; $a : d \leq b : d$, $(\forall) c \in \mathbb{N}$, $(\forall) d \in \mathbb{N}^*$, unde $a : d$ și $b : d$ sunt numere naturale.

6) Pentru orice numere naturale a și b avem $a = b$ sau $a > b$ sau $a < b$.

7) Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ și $a < b$, atunci $a \leq b + 1$.

8) Teorema împărțirii cu rest

Pentru orice numere naturale a, b, unde $b \neq 0$, există numerele naturale unice c și r, astfel încât $a = b \cdot c + r$, $r < b$.

9) $0 : b = 0$, $(\forall) b \in \mathbb{N}^*$.

10) Împărțirea la 0 (zero) nu are sens.

11) Câtul unei împărțiri poate fi egal cu zero: $a = b \cdot 0 + a$.

12) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Definiție. Pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$, orice $n \in \mathbb{N}^*$, definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$.

Avem $a^1 = a$, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), $0^n = 0$ ($n \neq 0$). Operația 0^0 nu are sens.

Proprietăți ale operațiilor cu puteri

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$;

3) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $a > 0$, $b > 0$, $m \in \mathbb{N}$;

4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $a > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Respect pentru oameni și cărti

- 1.** Să se calculeze suma $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Să se reconstituie următoarele adunări, știind că literele reprezintă numere diferite:

| | |
|-------------|-------------|
| a) NELU+ | b) NELU+ |
| NICU | TICU |
| <u>GICU</u> | <u>NICU</u> |
| TITI | GICU |

- 3.** Să se reconstituie operațiile:

| | |
|---|--|
| $\begin{array}{r} 1XXXX \\ \hline XXX \\ \hline =55X \end{array}$ $\begin{array}{r} XX7 \\ \\ X4X \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} X0X \\ \\ X8X \\ \hline XX1 \\ \hline XX2 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 15XXX \\ \hline XXX \\ \hline =9X \end{array}$ $\begin{array}{r} X6 \\ \\ 4XX \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} X2 \\ \\ 2XX \\ \hline X1X \\ \hline \end{array}$ |
|---|--|

- 4.** Dacă $a, b \in \mathbb{N}$, iar $a > 3b + 2$, să se compare $4a$ cu $12b + 11$.
- 5.** Să se determine deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul unei împărțiri de numere naturale, dacă împărțitorul este cifră, iar diferența dintre deîmpărțit și rest este 15.
- 6.** Să se determine trei numere naturale nenule dacă produsul lor este dublul sumei lor, iar triplul unui număr este egal cu suma celorlalte două numere.
- 7.** Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, să se calculeze sume $S(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.
- 8.** Să se rezolve ecuațiile:
- $2x + 4x + 6x + \dots + 200x = 50500$;
 - $x + 3x + 5x + \dots + 201x = 40804$.
- 9.** Pentru câte numere de două cifre, câtul împărțirii numărului de două cifre la răsturnatul său este 4.
- 10.** Să se determine numerele de trei cifre care împărțite la răsturnatul fiecăruia dau cel mai mare cât (răsturnatul este luat tot număr de trei cifre).
- 11.** Să se determine numărul de perechi de numere naturale $\overline{ab2}$ și $\overline{cd3}$, știind că suma lor este egală cu suma răsturnatelor lor.
- 12.** Să se determine două numere naturale care au suma 117, iar suma răsturnatelor lor este 180.
- 13.** Să se determine două perechi de numere naturale care au suma 171, iar suma răsturnatelor lor este 405.
- 14.** Să se calculeze următoarele sume:
- $A = 1002 + 1001 - 1000 - 999 + 998 + 997 - 996 - 995 + \dots + 6 + 5 - 4 - 3 + 2 + 1$;
 - $B = 1000 + 999 - 998 - 997 + 996 + 995 - 994 - 993 + \dots + 4 + 3 - 2 - 1$.
- 15.** Să se determine numerele naturale n și \overline{xy} , știind că $n \cdot \overline{xy} = \overline{x0y}$.
- 16.** Să se determine numerele \overline{abc} dacă $\overline{abc} = \overline{bc}(1 + \overline{bc})$.

17. Să se determine numerele naturale n , știind că împărțind pe n la 16, se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 25, iar împărțind pe n la 25, se obține câtul egal cu restul împărțirii lui n la 16.

18. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx} = \overline{xyz}$; b) $\overline{xyyz} + \overline{yty} = 2995$.

19. Să se determine numărul \overline{abcd} știind că: $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 2000$.

20. Să se determine numerele naturale x și y dacă $xy = 3x + y$.

21. Să se determine suma $a + b + c$ pentru pătratele magice de mai jos.

| | | |
|----|----|---|
| 16 | a | |
| 11 | 15 | b |
| c | 13 | |

| | | |
|----|----|----|
| a | 17 | 12 |
| b | c | |
| 18 | 13 | |

22. Să se determine numărul natural x minim, pentru care $4 \cdot \overline{x6} = \overline{6x}$.

23. Să se determine numărul \overline{abcd} știind că $\overline{abcd} - \overline{abc} - \overline{ab} - a = 1898$.

24. Fie a, b, c cifre nenule distințe. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care le poate avea numărul $A = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

25. Să se determine trei numere naturale consecutive dacă diferența dintre produsul ultimelor două numere și produsul primelor două numere este 52.

26. Să se determine numerele de patru cifre distințe scrise în ordine crescătoare care au suma cifrelor 15.

27. Dați exemple de numere pentru care suma cifrelor este egală cu produsul cifrelor.

28. Să se determine cel mai mare și cel mai mic număr de două cifre, care împărțit la un număr de o cifră dă restul 7.

29. Suma a trei numere este 129. Împărțind aceste numere la 9, 10, 11, se obțin aceleași câturi și aceleși resturi. Să se afle numerele.

30. Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale care dau câtul 4 la împărțirea cu 50.

31. Să se afle suma tuturor numerelor de două cifre care împărțite la 11 dau câtul egal cu restul.

32. Să se afle suma tuturor numerelor de două cifre care împărțite la 13 dau restul egal cu triplul câtului.

33. Să se afle restul împărțirii numărului $15! + 6!$ la 1001.

S-a notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

34. Să se afle suma tuturor numerelor de două sau trei cifre care împărțite pe rând la numerele 4, 5, 6 dau resturile 3, 4, respectiv 5.

35. Să se afle suma tuturor numerelor de două sau trei cifre, care împărțite la 25, dau restul egal cu o treime din cât.

36. Fie $n \geq 10$. Suma a două numere este $2n + 1$, iar restul împărțirii unui număr la celălalt este $n + 1$. Să se afle cele două numere.

37. Să se determine numerele de două cifre care împărțite la 5 dau restul 1 și împărțite la 4 dau restul 2.

38. Să se determine numerele \overline{abc} , care împărțite la \overline{ab} dau câtul $a + 1$ și restul a .

39. Să se determine numerele naturale de trei cifre care împărțite la 10, 12, 15 dau resturile egale cu 4.

40. Să se afle restul împărțirii numărului $1 + 2 + 3 + \dots + 1002 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1001$ la 1002.

41. Se consideră două numere naturale nenule. Se împarte suma și diferența lor la cel mai mic dintre ele. Să se determine diferența celor două resturi.

42. Fie cifrele $x > y \geq 1$. Să se determine restul împărțirii:

$$(\overline{xyy} - \overline{yyx}) : (\overline{yyx} - \overline{yxy}).$$

43. Numerele naturale nenule n și $5n$ au împreună un număr par de cifre. Să se demonstreze că n conține cifra 1.

44. Aceeași problemă pentru numerele n și $6n$, respectiv n și $7n$.

45. Să se determine cifrele x, y, z, t pentru ecuațiile:

a) $\overline{xyzt} + \overline{yzt} + \overline{zt} + \overline{t} = 1986$; b) $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{yxz} = 900$;

c) $\overline{xx} + \overline{yy} + \overline{zz} = \overline{xyz}$; d) $\overline{xyzt} + \overline{tzy4} = \overline{zzz0}$.

46. Să se afle diferența dintre un număr de 4 cifre consecutive și răsturnatul acestui număr.

47. Câte numere \overline{abcxy} au proprietatea $\overline{3xy} = \overline{abc} - \overline{cba}$?

48. Se împart numerele $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}$ la numărul $n \in \mathbb{N}^*$. Se obțin câturile $\overline{bc}, \overline{ca}, \overline{ab}$ și resturile a, b, c . Să se determine n și numerele \overline{abc} .

49. Să se determine numerele naturale a și b , știind că împărțind a la b se obține câtul 101 și restul 99, iar ultimul rest parțial este 20.

50. Să se determine valoarea maximă pentru $a + b + c$ și $a \cdot (b + 2c)$, știind că $2a + 3b + 6c = 58$ și $3a + 2b + 5c = 47$.

51. Să se compare numerele:

a) $A = 729^{120}$ și $B = 80^{180}$; b) $A = 2^{26} - 2^{24}$ și $B = 3^{17}$.

52. Să se aşeze în pătratele din figura alăturată numerele 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, astfel încât produsele elementelor de pe fiecare linie, fiecare coloană și fiecare diagonală să fie egale.

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

53. Să se scrie ca sumă de două pătrate de numere naturale numerele 10^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

54. Să se rezolve în numere naturale ecuațiile:

a) $\overline{a^a} = \overline{bc}$; b) $\overline{a^a} = \overline{bcd}$; c) $\overline{a^a} = \overline{bcde}$.

55.a) Să se scrie numărul 3^{n+1} ca sumă de trei numere naturale consecutive, $n \in \mathbb{N}$.

b) Să se scrie numărul 5^{n+1} ca sumă de cinci numere naturale consecutive, $n \in \mathbb{N}^*$.

56. Să se determine numerele \overline{xy} , știind că $\overline{xy} + \overline{yx}$ este pătrat perfect.

57. Să se determine suma cifrelor numărului $10^{2n} + 10^n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

58. Să se scrie numărul $\underbrace{111\dots1}_{n} \underbrace{222\dots2}_n$ ca produs de două numere naturale consecutive.

59.a) Să se determine numerele \overline{xy} dacă $x + y = x^3$.

b) Să se determine numerele \overline{xy} dacă $x + y = y^3$.

60. Să se determine trei numere naturale consecutive având produsul de forma \overline{abaaba} pentru oameni și cărți

61. Să se determine numerele \overline{abc} dacă $a^{b+c} + a^b + a^c = 296$.

62. Să se determine numerele naturale nenule x, y, z pentru care $x^{yz} = z^{xy}$.

63. Să se rezolve în numere naturale ecuațiile:

a) $4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} = 1344$; b) $4^{\overline{aa}} + 8^{\overline{bb}} = 2^{123}$;

c) $2^{3x+1} + 2^{2y+1} + 2^z = 112$; d) $2^{\overline{3x+2}} + 2^{\overline{2y+1}} + 2^{\overline{4z+1}} = 896$.

64. Să se determine numerele \overline{abc} în cazurile:

a) $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = (a+b+c)^2$; b) $\overline{aa} \cdot \overline{1ba} = \overline{cccc}$.

65. Să se determine suma cifrelor numărului $A = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_{100\text{ cifre}}$.

66. Să se scrie numărul $49 \cdot 100^{50}$ ca sumă de 49 numere naturale consecutive.

67.a) Să se determine numărul \overline{ab} dacă $5^{\overline{a+b}} = \overline{ab5}$.

b) Să se determine numărul \overline{abcd} dacă $3^{\overline{a+b}} = \overline{cad}$.

68. Fie $a, b, c, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^a + 2^b + 2^c = 7 \cdot 2^n$. Să se calculeze $a + b - c$.

69. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^n + x = 68$.

70. Să se verifice următoarele egalități:

a) $3^2 + 4^2 = 5^2$; d) $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$;

b) $33^2 + 44^2 = 55^2$; e) $33^3 + 44^3 + 55^3 = 66^3$;

c) $333^2 + 444^2 = 555^2$; f) $333^3 + 444^3 + 555^3 = 666^3$.

71. Fie numărul natural impar $a \geq 3$ și fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Să se scrie numărul a^n ca sumă de a numere naturale consecutive.

72. Să se rezolve ecuația:

$$2 + (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^2 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 \cdot 100^2) = n!$$

73. Să se compare numerele:

a) $A = 9^{100}$ și $B = 10^{90}$; b) $A = 169^{961}$ și $B = 961^{169}$.

74. Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se determine suma cifrelor numărului $a = 2^{4n+2} \cdot 5^{4n+5} - 4$.

75. Să se determine numărul \overline{ab} dacă $4^{\overline{aa}} + 8^{\overline{bb}} = 2^{68}$.

76. Fie sirul de numere (a_n) definit prin $a_1 = 4$; $a_2 = a_1 + 3 \cdot 4$; $a_3 = a_2 + 3 \cdot 4^2$; $a_4 = a_3 + 3 \cdot 4^3$;

a) Să se demonstreze că a_n este pătrat perfect.

b) Să se determine n , știind că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 2^{132}$.

77. Să se determine numărul \overline{ab} dacă $a^b = \overline{aa} + 5 \cdot a$.

78. Să se determine numerele naturale m, n, p, a dacă $3^m = a$, $3^n = a + 18$, $3^p = a + 72$.

79. Să se determine numerele \overline{abc} și \overline{xy} dacă $2^{\overline{xy}} + 53 = \overline{abc} + \overline{bc} + c$.

80. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $2n + 1$ și $3n + 1$ sunt pătrate perfecte, să se determine restul împărțirii lui n la 5.

81. Să se determine perechile (a, b) de numere naturale pentru care $143 < 2^a + 2^b < 289$.

82. Fie a, b, c cifre nenule distincte. Să se determine cea mai mică valoare a numărului $S = a^b + b^c + c^a$.

83. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ știind că suma cifrelor lui 5^n este 8.

84. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ știind că suma cifrelor lui 6^n este 9.

85. Să se rezolve în numere naturale ecuația $3^a + 3^b = 2 \cdot 3^c$.

86. Demonstrați că pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$ există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $A = 2^n + 4^a$ să fie pătrat perfect.

87. Să se rezolve în numere naturale ecuația $x^y + x^2 = 32$.

88. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că dacă $A = 2^{a+b} + 2^{a+c} + 2^{b+c} > 22$, atunci $A \geq 24$. Dacă a, b, c sunt distincte, atunci să se arate că $A \geq 28$.

89. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă există $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2n = a^2 + b^2$, atunci există $c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = c^2 + d^2$.

90. Să se afle câtul și restul împărțirii numărului $a = 6^n - 3^n + 2^{n+1} - 2^n - n + 1$ la numărul $b = 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

91. La înmulțirea a două numere de trei cifre, un elev a înlocuit cifrele unui număr cu cifre mai mari cu o unitate. Să se afle cele două numere dacă rezultatul obținut a fost 80730 în loc de 42435.

92. Să se determine numărul \overline{abcd} , știind că $\overline{ab} \cdot \overline{ba} = \overline{cda}$, unde $a \neq b \neq 0$.

93. Să se determine numerele \overline{ab} , știind că $\overline{abab} = \overline{ab} \cdot (\overline{ab} + \overline{ba} + a + b + 5)$.

94. Să se afle numerele \overline{mnp} dacă $(\overline{mn})^2 + (\overline{pp})^2 = (\overline{nm})^2$.

95. Să se afle numerele \overline{abc} pentru care $(\overline{ab})^2 = \overline{acc}$ și $(\overline{ba})^2 = \overline{cca}$.

96. Să se determine produsul $a \cdot b \cdot c$, știind că numerele $\overline{abc}, \overline{acb}$ și \overline{cba} sunt pătrate perfecte.

97. Să se rezolve în numere naturale ecuațiile:

a) $x^{yz} = 16$; b) $x^{y^z} = 16$.

98. Să se determine $m, n \in \mathbb{N}^*$ dacă $3 \cdot 2^m + 4 = 2^n$.

99. Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care n^n are n cifre.

100. Să se afle perechile de numere naturale (a, b) pentru care a^b are 3 cifre și b^a are două cifre.

101. Să se calculeze suma cifrelor numărului $a = (2^{300} + 2^{301}) \cdot (5^{300} + 5^{301})$.

102. Să se determine numărul cifrelor numărului $b = (2^5 + 5^{50}) \cdot (5^2 + 2^{50})$.

103. Suma ultimelor trei cifre ale unui pătrat perfect este egală cu 3. Să se determine restul împărțirii pătratului perfect la 100. Dați un exemplu.

104. Să se determine pătratele perfecte care sunt egale cu suma a 10 numere naturale consecutive de două cifre.

105. Să se determine numerele naturale \overline{ab} , știind că $a^3 + a^2 + a = 7 \cdot b$.

SOLUȚII

Capitolul 1. Numere naturale

1. Din $S(n) = 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$ și $S(n) = n + (n - 1) + \dots + 2 + 1$, prin adunare avem: $2 \cdot S(n) = (1 + n) + (2 + (n - 1)) + \dots + ((n - 1) + 2) + (n + 1)$, de unde rezultă că $S(n) = n(n + 1) : 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. a) Deoarece $U \neq I$, atunci avem $U \neq 0$, $U \neq 5$. Dacă $U = 1$ avem $I = 3$. Cum $T = 2 \cdot N + G$ sau $T = 2 \cdot N + G + 1$, $N \geq 2$, $G \geq 2$, $N \neq G \neq 3$, rezultă că $T \geq 8$. Avem $E \geq 5$, $E \leq 7$ și deci $T = 9$. Atunci $2C + L = 9$ sau $2C + L = 19$. Dacă $L = 5$ avem $C = 2$ sau $C = 7$. Dacă $C = 2$ avem $E = 7$ și apoi $2N + G = 8$ (imposibil). Dacă $C = 7$, atunci $E = 6$, $2N + G = 8$, $N = 2$, $G = 4$. Luăm apoi cazurile $U \in \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$.

3. Operațiile sunt:

$$\begin{array}{r} 18263 \\ \underline{- 127} \\ 143 \\ = 556 \\ \underline{- 508} \\ 483 \\ \underline{- 381} \\ 102 \end{array} \quad \begin{array}{r} 15336 \\ \underline{- 144} \\ 426 \\ = 93 \\ \underline{- 72} \\ 216 \\ \underline{- 216} \\ == \end{array}$$

4. Dacă $a > 3b + 2$ avem $a \geq 3b + 3$ și deci $4a \geq 12b + 12 > 12b + 11$.

5. Avem $1 \leq I \leq 9$, $D - R = C \cdot I = 15 = 15 \cdot 1 = 5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$. Dacă $I = 1$ rezultă $C = 15$, $R = 0$, $D = 15$. Dacă $I = 3$, rezultă $C = 5$, $R \in \{0, 1, 2\}$. Dacă $I = 5$, avem $C = 3$, $R \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ etc. Problema are 9 soluții.

6. Luăm cazul $b + c = 3a$ și din $abc = 2(a + b + c) = 8a$ rezultă $bc = 8$. Avem soluțiile $(27, 1, 8); (18, 2, 4); (18, 4, 2); (27, 8, 1)$. Din cazurile $a + c = 3b$ și $a + b = 3c$ mai obținem încă 8 soluții.

7. $S(n) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \dots + (2 \cdot n - 1) = 2(1 + 2 + \dots + n) - n = n(n + 1) - n = n^2$.

8. a) Avem $2x + 4x + 6x + \dots + 200x = 2x(1 + 2 + \dots + 100) = 10100x$ și deci $x = 5$;
b) Avem $(1 + 3 + 5 + \dots + 201)x = 101^2x$ și deci $x = 4$.

9. Fie $\overline{ab} = 4 \cdot \overline{ba} + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Obținem $6a = 39b + r$. Cum $6a \leq 54$, rezultă $b = 1$ și avem $6a = 39 + r$, de unde $r = 3$, $a = 7$.

10. Din $\overline{abc} = n \cdot \overline{cba} + r$, $r < \overline{cba}$. Luăm $n = 9$ și atunci avem $\overline{9b1} = 9 \cdot \overline{1b9} + r \Leftrightarrow 901 + 10b = 981 + 90b + r$ (imposibil). Pentru $n = 8$ avem $901 + 10b = 872 + 90b + r \Leftrightarrow 70b + r = 29$ (imposibil). Pentru $n = 7$ avem $901 + 10b = 763 + 70b + r \Leftrightarrow 238 = 60b + r$. Dacă $b = 0$, atunci $r = 238 > \overline{cba} = 109$. Dacă $b = 1$, atunci $r = 178 > \overline{cba} = 119$. Dacă $b = 2$, atunci $r = 118 < \overline{cba} = 129$. Cel mai mare cât este 7 și numărul este 921.

11. Din $100a + 10b + 2 + 100c + 10d + 3 = 200 + 10b + a + 300 + 10d + c$ rezultă că $99(a + c) = 495$ și deci $a + c = 5$. Pentru (a, c) avem 4 perechi: $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$. Cum b, d pot fi date de orice cifră, problema are $4 \cdot 10 \cdot 10 = 400$ soluții.

12. Din $\overline{ab} + \overline{mn} = 117$ și $\overline{ba} + \overline{nm} = 162$, rezultă că $10(a + m) + b + n = 117$, $10(b + n) + a + m = 180$. Obținem $a + m = 10$, $b + n = 17$. Pentru (a, m) avem soluțiile $(1, 9), (2, 8), \dots, (8, 2), (9, 1)$, iar pentru (b, n) avem soluțiile $(8, 9), (9, 8)$. Numărul perechilor (ab, mn) este 18.

13. Nu putem avea ambele numere de trei cifre deoarece $\overline{abc} + \overline{mnp} \geq \overline{1b1} + \overline{1n1} \geq 202 > 171$. Dacă luăm $\overline{abc} + \overline{mn} = 171$ și $\overline{cba} + \overline{nm} = 405$, obținem $\overline{bc} + \overline{mn} = 71$, $a = 1$, $10\overline{cb} + \overline{nm} = 404$, $m = 4$. Obținem $\overline{bc} + \overline{n} = 31$, $n + \overline{cb} = 40$ și deci $c = b + 1$, $11b + n = 30$. Atunci $b = 2$, $n = 8$, $c = 3$. Numerele sunt 123 și 48.

14. a) $A = (1002 + 1001 - 1000 - 999) + (998 + 997 - 996 - 995) + \dots + (6 + 5 - 4 - 3) + (2 + 1) = 4 \cdot 250 + 3 = 1003$; b) $B = (1000 + 999 - 998 - 997) + (996 + 995 - 994 - 993) + \dots + (4 + 3 - 2 - 1) = 4 \cdot 250 = 1000$.

15. Avem $n \geq 2$. Din $n(10x + y) = 100x + y$ rezultă $10x(10 - n) = y(n - 1)$. Avem $n \leq 10$. Dacă $n = 10$, atunci $y = 0$, $x \in \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$. Pentru $n \leq 5$ nu avem soluții. Soluțiile (n, x, y) sunt $(6, 1, 8), (7, 1, 5), (9, 4, 5)$.

16. Avem $100 \cdot a = \overline{bc}^2$ și deci $\overline{abc} \in \{110, 420, 930\}$.

17. Avem $n = 16a + b$, $b \leq 5$, $n = 25b + a$, $a \leq 24$. Din $16a + b = 24b + a$ rezultă $3a = 5b = 15p$ și deci $a = 5p$, $b = 3p$. Avem $p \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și atunci $n \in \{0, 83, 166, 249, 332\}$.

18. a) Avem $11(x + y + z) = 100x + 10y + z \Leftrightarrow 10z + y = 89x \Leftrightarrow \overline{zy} = 89 \cdot x$. Atunci $\overline{xyz} = 198$; b) Nu putem avea decât $x \leq 2$. Dacă $x = 2$, rezultă $220y + z + t = 995$. Pentru $y \leq 4$, avem $220y + z + t \leq 898 < 995$, iar pentru $y \geq 5$ rezultă $220y + z + t \geq 1100 > 995$. Rămâne $x = 1$ și atunci $220y + z + t = 1995$. Nu putem avea decât $y = 9$ și atunci $z + t = 15$, de unde $(z, t) \in \{(6, 9), (7, 8), (8, 7), (9, 6)\}$.

19. Dacă $a \geq 2$ avem $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} \geq 2110 + 110 + 10 > 2000$. Dacă $a = 2$ rezultă $100b + 15c + 2d = 500$. Pentru $b \leq 3$ avem $A = 100b + 15c + 2d \leq 453 < 500$ și pentru $b \geq 5$ avem $A > 500$. Dacă $b = 4$, atunci rezultă $15c + d = 100$, de unde $d = 5$ și $c = 6$.

20. Avem $x(y - 3) = y$. Dacă $x = 0$ atunci $y = 0$. Pentru $y \in \{1, 2, 3\}$ nu avem soluție. Atunci $x(y - 3) - (y - 3) = 3$ și deci $(x - 1)(y - 3) = 1 \cdot 3$. Atunci $(x, y) \in \{(2, 6), (4, 4)\}$.

21. a) $a + b + c = 17 + 19 + 18 = 54$; b) $16 + 11 + 15 = 42$.

22. x nu poate fi cifră. Dacă notăm cu n numărul cifrelor lui x , pentru $n = 2$ rezultă $39 \cdot x = 576$ (imposibil). Pentru $n = 3$ rezultă $399 \cdot x = 5976$ (imposibil). Pentru $n = 4$ rezultă $3999x = 59976$. Pentru $n = 5$ rezultă $x = 15384$.

23. Dacă $a = 1$, atunci avem $b = 9$ și rezultă $1690 - \overline{cd} = 1898$ (fals). Dacă $a \geq 3$, avem $\overline{abcd} - \overline{abc} - \overline{ab} - a > 1898$. Rezultă că avem $a = 2$. Rămâne $\overline{bcd} - \overline{bc} - b = 120$, adică $89b + 9c + d = 120$. Avem $b = 1$ și $9c + d = 31$. Obținem $\overline{abcd} = 2134$.

24. Avem $A = 211a + 121c + 112b$. Atunci $\max A = 211 \cdot 9 + 121 \cdot 8 + 112 \cdot 7 = 3657$

și $\min A = 211 \cdot 1 + 121 \cdot 2 + 112 \cdot 3 = 789$.

25. Notând numerele cu $a, a+1, a+2$, avem $(a+1)(a+2) - a \cdot (a+1) = 52$. Obținem $2 \cdot (a+1) = 52$. Numerele sunt 25, 26, 27.

26. Fie numerele \overline{abcd} cu $1 \leq a < b < c < d$. Avem numerele 1239, 1248, 1257, 1347, 1356, 2346.

27. 123; 11222; 11133; 11111223 etc.

28. Împărtitorul poate fi 8 sau 9. Dacă împărtitorul este 8, numărul este de forma $8n + 7$. Obținem numerele $8 \cdot 1 + 7 = 15$, respectiv $8 \cdot 11 + 7 = 95$. Dacă numărul este de forma $9n + 7$, obținem numerele $9 \cdot 1 + 7 = 16$, respectiv $9 \cdot 10 + 7 = 97$.

29. Numerele sunt $9a + b, 10a + b, 11a + b$, unde $b \leq 8$. Avem $30a + 3b = 129$, de unde $a = 4, b = 3$. Numerele sunt 39, 43, 47.

30. $(50 \cdot 4 + 0) + (50 \cdot 4 + 1) + (50 \cdot 4 + 2) + (50 \cdot 4 + 3) + \dots + (50 \cdot 4 + 49) = 50 \cdot 4 \cdot 50 + (1 + 2 + \dots + 49) = 10825$.

31. Numerele sunt de forma $11 \cdot a + a = 12a$, unde $1 \leq a \leq 8$. Suma este $12 \cdot (1 + 2 + \dots + 8) = 432$.

32. Numerele sunt de forma $13 \cdot n + 3n = 16n$, unde $3n \leq 12$. Suma este $16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 160$.

33. Avem $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Deci $15!$ se împarte exact la 1001. Restul este $6! = 720$.

34. Numerele au forma $n = 4a + 3 = 5b + 4 = 6c + 5$. Atunci $n + 1 = 4(a + 1) = 5(b + 1) = 6(c + 1) = 60m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Obținem $n = 60m - 1$ cu $1 \leq m \leq 16$. Suma numerelor este $60 \cdot (1 + 2 + \dots + 16) - 16 = 8144$.

35. Numerele sunt de forma $25 \cdot 3a + a$, unde $a \leq 24$. Din $10 \leq 76a \leq 999$ rezultă $1 \leq a \leq 13$. Suma este $76 \cdot (1 + 2 + \dots + 13) = 7007$.

36. Avem $a + b = 2n + 1$; $a = bm + n + 1$. Avem $a \geq n + 1$, $b \leq n$. Obținem $m = 0$, $a = n + 1$, $b = n$.

37. Din $5a + 1 = 4b + 2$ rezultă $a = 4(b - a) + 1 = 4n + 1$. Numerele sunt de forma $5(4n + 1) + 1 = 20n + 6$. Aceste numere sunt 26, 46, 66, 86.

38. $\overline{abc} = \overline{ab} \cdot (a+1) + a \Leftrightarrow 10 \cdot \overline{ab} + c = \overline{ab} \cdot (a+1) + a \Leftrightarrow (9 - a) \cdot \overline{ab} = a - c$. Dacă $a \neq 9$ rezultă $(9 - a) \cdot \overline{ab} > a - c$. Avem $a = c = 9$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

39. Avem $n - 4 = 10a = 12b = 15c = 60d$ și deci $n = 60d + 4$. Din $100 \leq n \leq 999$ rezultă că $2 \leq d \leq 16$.

40. Avem $1002 = 2 \cdot 501$ și $1001! = 2 \cdot 501m$, $m \in \mathbb{N}^*$. Restul căutat este restul împărțirii numărului $1 + 2 + \dots + 1002 = 501 \cdot 1003 = 501 \cdot 1002 + 501$ la 1002, adică este 501.

41. Dacă avem $a = b \neq 0$, atunci $S = 2 \cdot a$, $D = 0 = 0 \cdot a$ și ambele resturi sunt nule. Fie $a > b$. Atunci există $c, r \in \mathbb{N}$ unice astfel încât $a = bc + r$, $r < b$. Avem $S = bc + r + b = b \cdot (c + 1) + r$, $D = a - b = b(c - 1) + r$. Diferența resturilor cerute este $r - r = 0$.

42. Avem $A = (1100 - 11)(x - y) = 1089(x - y) = 1089a$, $1 \leq a \leq 8$, iar $B = (1001 - 110)(x - y) = 891a$. Atunci $1089a = 891 \cdot a + 198a$. Câțul este 1 și restul este 198a.

43. Dacă n are $2k$ cifre, $k \in \mathbb{N}^*$, cum $5n < 10n$, rezultă că $5n$ are tot $2k$ cifre sau $2k + 1$ cifre (cât are $10n$). Cum suma cifrelor celor două numere este număr par, rezultă că $5n$ are tot $2k$ cifre și atunci prima cifra a lui n este obligatoriu 1.