Petre Năchilă

Cătălin-Eugen Năchilă

Exerciţii şi probleme pentru cercurile de matematică

Clasa a VII-a

Editura Nomina

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

ALGEBRĂ

Capitolul 1
DIVIZIBILITATE.
MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Să se demonstreze că pentru orice număr natural m, există numărul natural n, astfel încât numărul $a = 3 \cdot 5^n + 5^{2m}$ să fie pătrat perfect.
2. Să se determine numărul prim n pentru care numărul $n^2 + 13$ este număr prim.
3. Să se determine numărul $n \in \mathbf{N}$, știind că $8n + 1$ și $24n + 1$ sunt pătrate perfecte, iar $8n + 3$ este număr prim.
4. Fie $a, b \in \mathbf{N}^*$ și fie $d = (a, b)$, $m = [a, b]$. Să se demonstreze că $a + b \geq d + m$.
5. Să se determine numărul natural n pentru care numărul $a = n^3 - 3(n^2 - n + 3)$ este număr prim.
6. Să se determine numerele prime m și n, știind că numerele $a = mn + 7$ și $b = 4m + n$ sunt prime.
7. Fie $x, y \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $4^{x-2} + 4^{y+1} \leq 2^{x+y}$. Să se demonstreze că numărul $a = 2^x + 2^y$ este divizibil cu 9.
8. Să se determine numerele întregi m și n, știind că numărul $p = m^2n - 3mn + m + 2n - 2$ este prim.
9. Să se demonstreze că există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (a, b) astfel încât $a < b$, $b + 1 \mid a^2$ și $a + 1 \mid b^2$.
10. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, știind că numerele n, $n + 2$, $n + 6$, $n + 14$ și $n + 18$ sunt simultan numere prime.
11. Să se determine numerele $n \in \mathbf{N}$ pentru care numerele $n + 2$, $n + 4$, $n + 8$, $n + 10$, $n + 16$ sunt simultan numere prime.
12. Să se determine $n \in \mathbf{N}$, pentru care numerele $n + 3$, $n + 7$, $n + 13$, $n + 15$, $n + 19$ și $n + 25$ sunt simultan numere prime.
13. Să se demonstreze că nu există n numere naturale impare, prime și consecutive, unde $n \geq 4$.
14. Să se demonstreze că există numere de forma $A = \overline{\underbrace{aa\ldots a}_{n\text{ cifre}}\underbrace{bbb\ldots b}_{n\text{ cifre}}}$ care se pot scrie ca produs de două numere naturale consecutive, unde $a = 2b$.
15. Să se demonstreze că numărul $a = 2^{2025} + 1$ nu este număr prim.
16. Să se demonstreze că numerele $A = \overline{\underbrace{999\ldots9n}_{100\text{ cifre}}}$ sunt numere compuse.
17. Să se determine cel mai mare divizor prim al numărului de patru cifre $A = \overline{abcd}$, unde $b = 3a$, $d = 3c$.

18. Să se demonstreze că numerele $A = \underbrace{\overline{aaa...a}}_{n\ cifre}$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, nu sunt pătrate perfecte.

19. Fie a, b, c numere prime distincte. Fie $n \in \mathbf{N}$ şi fie numărul $A = a^{4n} + b^{4n} + c^{4n}$. Să se demonstreze că A nu este pătrat perfect.

20. Să se determine numerele naturale n pentru care numerele $2^n - 1$ şi $2^n + 1$ sunt simultan numere prime.

21. Fie a şi b numere prime astfel încât $a > b \geq 5$. Să se demonstreze că există un număr de două cifre care divide numărul $a^2 - b^2$.

22. Să se determine numerele prime a, b, c, d, n ştiind că $a = b + c = d - n$.

23. Fie numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbf{N}^*$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$ astfel încât $a_2^2 = a_1a_3$, $a_3^2 = a_2a_4$, ..., $a_{n-1}^2 = a_{n-2}a_n$ şi $a_n^2 = a_{n-1}a_1$. Să se afle numerele $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ştiind că $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 4n$.

24. Să se precizeze care numere de la 1 la 999999 sunt mai multe: cele care se divid cu 13, dar nu se divid cu 17 sau cele care se divid cu 17, dar nu se divid cu 13.

25. Fie numărul $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât suma cifrelor lui n este egală cu suma cifrelor lui 3n. Să se demonstreze că $3 \mid n$, $9 \mid n$, dar nu neapărat $27 \mid n$.

26. Se consideră numărul 213213213213. Care cifre trebuie şterse pentru a obţine cel mai mare număr divizibil cu 9?

27. Se consideră 3 numere naturale a, b, c cu $a + b + c = 12$. La oricare două dintre cele trei numere se adaugă 1 şi numerele obţinute înlocuiesc pe cele date iniţial, unul rămânând egal cu cel dat. Este posibil ca după mai multe astfel de operaţii să se obţină trei numere impare egale?

28. Fie numărul $a_n = 111...1$, care conţine n cifre de 1, $n \in \mathbf{N}^*$. Ştiind că $7 \mid a_n$, să se demonstreze că există 4 numere prime de cel mult două cifre care divid numărul a_n.

29. Să se determine numerele prime $a = n^4 + 3n^2 - 2n + 3$, $n \in \mathbf{N}$.

30. Suma a patru numere naturale este 630. Să se determine cea mai mică valoare pe care o are c.m.m.m.c. al celor patru numere.

31. Să se determine cel mai mare număr de numere naturale consecutive care în descompunerile lor în factori primi au aceşti factori primi cu exponenţii numere naturale impare.

32. Să se determine numerele prime m, n, p ştiind că numărul $A = (m^2 - np)(n^2 - mp)(p^2 - mn)$ este număr prim.

33. Să se demonstreze că nu există numerele naturale a, b, c, d diferite între ele, astfel încât $3^a + 3^b + 3^c = 3^d$.

34. Să se determine numerele $\overline{abc}$ pentru care $\overline{abc} = (a + b + c)^2 + a + b + c$.

35. Să se determine $n \in \mathbf{Z}$ şi numerele prime p şi q, pentru care $n^3 = n + pq$.

36. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ cu proprietatea $|a_i| \in \{0, 1\}$ pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_n = a$, $a \in \mathbf{Z}$.

a) Să se calculeze $a_1^{2m+1} + a_2^{2m+1} + ... + a_n^{2m+1}$, unde $m \in \mathbf{N}$.

b) Să se determine $|S|$, unde S este suma tuturor produselor $a_i a_j$ cu $1 \le i < j \le n$. Se știe că $a = 1$.

37. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}^*$, $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = n$.

a) În ce condiții ecuația cu necunocutele (a, b, c), pentru care n este fixat, are un număr finit de soluții?

b) Dacă (a_0, b_0, c_0) este soluție cu $b_0 + c_0 \neq 0$, iar n este fixat, să se determine valoarea minimă, respectiv maximă a expresiei $S = a_0^2 + b_0^2 + c_0^2$.

38. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$, unde $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 4$. Fie $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ și fie $P = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right)\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_1}\right)$.

a) Să se determine valorile numărului $|S|$.

b) Să se determine P dacă $|S| < n$.

39. Fie numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cu $|a_i| = 1$, $(\forall)\ i = \overline{1,n}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \ge 3$, astfel încât $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0$.

a) Să se demonstreze că $4 \mid n$.

b) Să se determine numărul soluțiilor (a_1, a_2, a_3, a_4) (pentru $n = 4$).

40. Fie o mulțime finită $A \subset \mathbf{Z}$ astfel încât cel mai mare element din A este 100. Să se determine A, știind că dacă $|a| + |b| \in A$, atunci $a - b \in A$.

41. Să se determine perechile (a, b) formate din numere întregi pentru care $|a| + |b| = 10$ și $|ab| = n^2$, $n \in \mathbf{N}$.

42. Fie $a, b, m, n \in \mathbf{N}^*$. Să se demonstreze că numerele $A = (2a)^m + 1$ și $B = (2b)^n - 1$ sunt prime între ele.

43. Este posibil ca să se scrie pe un cerc numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 astfel încât suma oricăror trei numere vecine să fie cel puțin egală cu 16?

44. a) Să se determine c.m.m.d.c. al numerelor $a = \underbrace{111\ldots1}_{8n+4}$ și $b = 11111111$.

b) Să se determine $(\underbrace{111\ldots1}_{n}; \underbrace{111\ldots1}_{m})$, unde $m, n \in \mathbf{N}^*$.

45. Să se determine numerele $a = n(n^2 + 4)(n^2 + 6)$, $n \in \mathbf{N}$, care au exact 8 divizori naturali.

46. Să se demonstreze că nu există numere de forma $9n - 4$, $n \in \mathbf{N}^*$, care să fie produsul a două numere naturale consecutive.

47. Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Să se determine $x, y, z \in \mathbf{N}$ cu $x \le y \le z$, pentru care $(2n)^x + (2n + 1)^y = (2n + 2)^z$.

48. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^* - \{1\}$ astfel încât $(a, c) = (b, c)$ și $[a, c] = [b, c]$. Să se demonstreze că $a = b$.

49. Să se rezolve în numere întregi ecuația $a + b + c + ab + ac + bc + abc = 5$.

50. Să se determine $a \in \mathbf{N}$, $a > 999$, știind că $(a + n; 999 + n) = 1$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, $n \le a - 999$.

51. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{Z}$ definit astfel: $a_1 = a$, $a_2 = a + b$, $a_3 = a_2 - a_1$, $a_4 = a_3 - a_2$, ..., $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $(\forall)\ n \in \mathbf{N}^*$, unde $a, b \in \mathbf{Z}$.

a) Să se determine suma a 6 termeni consecutivi ai şirului.

b) Să se demonstreze că există $r \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a_n + a_{n+r} = 0$, pentru price $n \in \mathbf{N}$.

c) Să se determine a şi b, dacă suma pătratelor a 6 termeni consecutivi este egală cu 12.

52. Fie $a \in \mathbf{N}^* - \{1\}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $A = a^{6n^2+5n+1} - 1$, $B = a^{3n^2+4n+1} + 1$. Să se determine $d = (A, B)$.

53. Fie $a, b \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $ab = (a + 3)(b - 2)$. Să se demonstreze că $\frac{a}{b} - \min\frac{a}{b} < 1$.

54. Să se determine $x, y, z \in \mathbf{N}$ ştiind că $x = \frac{y^2}{8} = \frac{z^3}{4}$ şi $xyz = 16$.

55. Să se determine numerele prime m, n, p ştiind că $mn + mp + np > mnp$.

56. Să se determine două numere de 4 cifre care sunt de 88 ori mai mari decât suma cifrelor lor.

57. Să se determine numărul $a = 1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + ... - 1000! \cdot 1002 + 1001!$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

58. Să se demonstreze că nu există două numere naturale nenule cu suma egală cu 143 şi produsul divizibil cu 143.

59. Fie $n \in \mathbf{N}^*$, $a = 122...221$ având $n + 2$ cifre şi $b = 999999$. Să se determine n minim pentru care $b \mid a$.

60. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Să se determine n pentru care $n + s(n) = 2016$.

61. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $a^3 + 1 = 2^n$.

62. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $a^3 + 1 = 3^n$.

63. Să se determine toate perechile de numere prime de forma $(a^n - 1;\ a^n + 1)$, unde $a, n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$.

64. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ şi fie $E(a, b) = (-1)^{a^b} + (-1)^{b^a}$. Să se calculeze $E(a, b) + E(b, c) + E(c, a) = A$.

65. Fie $a, b, c \in \mathbf{N}^*$. Să se calculeze: $A = (-1)^{x^{y^z}} + (-1)^{y^{z^x}} + (-1)^{z^{x^y}}$.

66. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{N}^*$ ştiind că $\frac{a^2}{9} = \frac{b^3}{16} = \frac{c^4}{4}$ şi $a^6 \cdot b^4 \cdot c^3 = 3^6 \cdot 2^{17}$.

67. Se consideră numerele întregi $a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbf{Z}^*$, unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 7$, cu proprietatea că suma oricăror 5 termeni consecutivi este strict negativă şi suma oricăror 7 termeni consecutivi este strict pozitivă. Să se demonstreze că $n \leq 10$.

68. Să se determine cel mai mic şi cel mai mare număr $n = \overline{abcd}$ pentru care $\overline{abcd} + a - b + c - d = m^2$, $m \in \mathbf{N}$.

69. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x^2 + x = 5^y + 1$.

70. Să se determine $a \in \mathbf{N}$ astfel încât ecuaţia $|x| + |x - 1| + |x - 2| + ... + |x - 20| = a$ să aibă soluţie unică.

71. Să se demonstreze că orice număr natural $n \geq 12$ este suma a două numere compuse.

72. Să se determine numerele naturale a și b și numerele prime p, q știind că $aq = bp$, $a + b = 45$ și $(a + b) : (p + q)$ este număr prim.

73. Să se demonstreze că pentru orice trei numere naturale impare, există un alt număr natural impar, astfel încât suma pătratelor celor 4 numere să fie pătrat perfect.

74. Să se determine $m, n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât numerele $a = m^2 + 6n$ și $b = n^2 + 6m$ să fie simultan pătrate perfecte.

75. Să se determine $a, b \in \mathbf{N}^*$, știind că $(a, b) + [a, b] = 2a + b$.

76. a) Să se demonstreze că există $a, b, c \in \mathbf{Z}$, astfel încât $a^2 + b^2 = 8c - 1$.

b) Să se demonstreze că există $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încât $a^2 + b^2 = 4c + 103$.

77. Să se determine $n \in \mathbf{N}^*$, știind că $24 \mid a$, unde $a = 5^n + n$.

78. Să se demonstreze că suma pătratelor a trei numere întregi consecutive poate fi egală cu suma pătratelor a două numere întregi consecutive. Dați cel puțin 6 exemple.

79. a) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n, care au exact 8 divizori naturali dați de $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_7 < d_8 = 7$ și $d_3 \cdot d_6 = d_4 \cdot d_5$.

b) Dați un exemplu pentru care n are cel puțin doi divizori primi distincți și $d_2 + d_6 = d_4 + d_5$.

80. Să se determine numerele întregi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 pentru care $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5$ și $|a_1 - a_2| = |a_2 - a_3| = |a_3 - a_4| = |a_4 - a_5| = |a_5 - a_1|$.

81. Să se determine numerele întregi a, b, c, știind că $2ab = a + b - 4$; $2bc = 3b + c$ și $2ac = 3a - c$.

82. Să se demonstreze că ecuația $3^{x+2} = y^2 - 7 \cdot 3^x$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.

83. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 1$.

84. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația $(x - y)^2 = 19 - xy$.

85. Să se determine numărul minim al divizorilor numărului $n = \overline{abc\,abc}$.

86. Să se rezolve în $\mathbf{Z}$ ecuația $9^a = b^2 + 4b + 60$.

87. Determinați patru numere impare consecutive pentru care suma pătratelor este pătrat perfect.

88. Să se determine suma numerelor naturale nenule $a < b < c$ pentru care $a! \cdot b! \cdot c! = 720$.

89. Determinați numerele prime a și b știind că $\frac{a}{b+2}$ și $\frac{2b-1}{a}$ sunt numere naturale.

90. Să se determine numerele naturale a și b pentru care a și b pentru care $2^a \cdot 3^b + 4$ este pătrat perfect.

SOLUȚII

ALGEBRĂ

Capitolul 1
DIVIZIBILITATE. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

1. Luând $n = 2m + 1$ avem $a = 5^{2m} \cdot 16 = (4 \cdot 5^m)^2$.
2. Deoarece $n \in \mathbf{N}$ rezultă că $n^2 + 13 \geq 13$. Cum $n^2 + 13$ este număr prim, rezultă că $n = 2$;
3. Observăm că 0 şi 1 sunt soluții. Orice $n \geq 2$ nu este soluție.
4. Pentru $a = b$ avem $d = m = a = b$ şi avem egalitate. Presupunem $a < b$ şi fie $a = dn$, $b = dp$, $n, p \in \mathbf{N}^*$, $(n, p) = 1$, $n < p$. Avem $m = dnp$ şi atunci rezultă că $a + b = dn + dp \leq d + m = d + dnp \Leftrightarrow n + p \leq 1 + np \Leftrightarrow (n - 1) \cdot (p - 1) \geq 0$.
5. Avem $a = (n - 3)(n^2 + 3)$. Rezultă $n - 3 = 1$ şi $n = 4$.
6. Deoarece $a = mn + 7$ este număr prim, rezultă că $m = 2$ sau $n = 2$. Dacă $m = 2$ avem $a = 2n + 7$, $b = 8 + n$. Rezultă că n este număr impar. Dacă $n = 6k + 1$, avem $a = 3(4k + 3)$ (imposibil). Dacă $n = 6k - 1$, avem $k \in \{1, 2\}$ şi deci $n \in \{5, 11\}$. Mai este soluție şi $n = 3$. Dacă $n = 2$, avem $a = 2m + 7$, $b = 4m + 2$ şi b nu este număr prim.
7. Avem $(2^{x-2} - 2^{y+1})^2 \leq 0$, de unde $x = y + 3$, $a = 2^y \cdot 9$.
8. Avem $(m - 2)(mn - n + 1) = p$, unde p este număr prim. Atunci $m - 2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ şi deci $m \in \{0, 1, 3, 5\}$. Dacă $m = 0$, rezultă $n = \dfrac{p+2}{2} = 2$. Dacă $m = 1$, rezultă $p = -1$ (imposibil). Dacă $m = 3$, avem $p = 2n + 1$ şi atunci $n = \dfrac{p-1}{2}$, unde p este număr prim impar. Dacă $m = 4$, rezultă $p = 6n + 2$, nu este număr prim.
9. Perechile $(n, n^2 - 1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, sunt soluții deoarece $n^2 - 1 + 1 = n^2$ şi $(n^2 - 1)^2 = (n - 1)^2(n + 1)^2 = (n + 1) \cdot [(n - 1)^2 \cdot (n + 1)]$.
10. Se observă că 2 şi 3 nu sunt soluții, iar 5 este soluție. Luând $n = 5k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci avem $5 \mid n$ pentru perechile $(n + 14, 5k + 1)$, $(n + 18, 5k + 2)$, $(n + 2, 5k + 3)$ şi $(n + 6, 5k + 4)$.
11. Numerele pare nu sunt soluții. Numerele 1 şi 5 nu sunt soluții. Numărul 3 este soluție. Se studiază cazurile $n = 5k + r$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Nu mai sunt alte soluții.
12. Se observă că numerele impare nu sunt soluții. Observăm că 0 şi 2 nu sunt soluții şi că $n = 4$ este soluție. Se iau numerele de forma $6k + r$, $k \in \mathbf{N}^*$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ şi nu mai obținem alte soluții.
13. Cel puțin unul dintre numerele m, $m + 2$, $m + 4$, $m + 6$, unde $m \in \mathbf{N}^*$, $m \geq 3$, este divizibil cu 3 şi cel puțin egal cu 7 (luând $m = 3k + r$, $k \in \mathbf{N}^*$, $r \in \{0, 1, 2\}$).
14. Avem $A = b \cdot B$, unde $B = \underbrace{22...2}_{n}\underbrace{11...1}_{n} = 2 \cdot 10^n(1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) + (1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1}) = (1 + 10 + ... + 10^{n-1})(1 + 2 \cdot 10^n)$. Pentru $b = 2$ avem $2 \cdot (1 + 10 + ... + 10^{n-1}) = 2 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}$, unde $\dfrac{10^n - 1}{9} \in \mathbf{N}$. Rezultă că $A = \dfrac{2(10^n - 1)}{3} \cdot \dfrac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$, unde $\dfrac{2(10^n - 1)}{3}$ şi

$\frac{2\cdot 10^n+1}{3} \in \mathbf{N}$ și $\frac{2\cdot 10^n+1}{3} - 1 = \frac{2(10^n-1)}{3}$.

15. Avem $a = (2^{675})^3 + 1 = (2^{675} + 1)(2^{1350} - 2^{675} + 1)$.

16. Pentru $n \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ avem $2 \mid A$. Pentru $n \in \{0, 3, 6, 9\}$ avem $3 \mid A$, iar pentru $n \in \{0, 5\}$ avem $5 \mid A$. Pentru $n = 1$ avem $A = 10^{100} - 9 = (10^{50} - 3)(10^{50} + 3)$. Pentru $n = 7$, împărțim numărul A în 16 grupe de forma 999999 și grupa 9997. Cum $13 \mid 999999$ și $13 \mid 9997$ rezultă că $13 \mid A$.

17. Avem $A = 1300a + 13c = 13 \cdot \overline{a0c}$, unde $a \in \{1, 2, 3\}$, $c \in \{0, 1, 2, 3\}$. În acest caz trebuie determinat cel mai mare număr prim de forma $\overline{a0c}$, care este numărul 103.

18. Deoarece ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă că $a \notin \{0, 2, 3, 7, 8\}$. Orice pătrat perfect este de forma $4k$ sau $4k + 1$ și deci $a \notin \{1, 5, 6, 9\}$. Dacă $a = 4$, avem $A = 2^2 \cdot B$, unde B nu este pătrat perfect.

19. Dacă $a, b, c \notin \{2, 5\}$, atunci a^{4n}, b^{4n}, c^{4n} au ultima cifră egală cu 1 și deci ultima cifră a lui A este dată de $u(A) = 3$ și deci A nu este pătrat perfect. Dacă $\{a, b\} = \{2, 5\}$, atunci $u(A) = u(6 + 5 + 2) = 3$ și A nu este pătrat perfect. Dacă $a = 2$ și $b \neq 5$, $c \neq 5$, atunci $u(A) = u(6 + 1 + 1) = 8$, iar dacă $a = 5$ și $b \neq 2$, $c \neq 2$, atunci $u(A) = u(5 + 1 + 1) = 7$. Din nou A nu este pătrat perfect.

20. Numerele 0 și 1 nu sunt soluții. Numărul 2 este soluție. Pentru $n \geq 3$ avem două cazuri. Dacă $n = 2m$, avem $2^{2m} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$ și cum $2^m - 1 \geq 3$, $2^m + 1 \geq 5$, numărul $2^{2m} - 1$ nu este număr prim. Dacă $n = 2m + 1$, numărul $2^{2m} + 1 = 2 \cdot (3 + 1)^m + 1 = 2(M_3 + 1) + 1 = M_3$ nu este număr prim.

21. Numerele sunt de forma $6n \pm 1$, $6m \pm 1$, $m, n \in \mathbf{N}$. Atunci $a^2 - b^2 = 36n^2 \pm 12n + 1 - (36m^2 \pm 12m + 1) = 12n(3n \pm 1) - 12m(3m \pm 1)$. Cum $n(3n \pm 1)$ și $m(3m \pm 1)$ sunt numere pare, rezultă că $12 \mid a^2 - b^2$ și $24 \mid a^2 - b^2$.

22. Avem $a \geq 5$, $d \geq 7$, b și c de parități diferite. Avem deci $b = 2$, c impar, sau $c = 2$, b impar. Dacă $b = 2$, cum $b + c$ este număr impar, rezultă că $n = 2$. Avem $a = 2 + c = d - 2$ și atunci trebuie să găsim numerele prime c, $c + 2$, $c + 4$ cu $c \geq 3$. Observăm că $c = 3$ este soluție și avem $a = 5$, $d = 7$. Dacă $c \geq 5$, nu mai avem soluție. Dacă $c = 3m + 1$, atunci $c + 2 = 3(m + 1)$, iar dacă $c = 3m + 2$, atunci $c + 4 = 3(m + 2)$. Analog mai avem soluție $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 7$, $n = 2$.

23. Din relațiile date rezultă $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_1}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = 1$ și deci $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a \in \mathbf{N}^*$. Din $4n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = n \cdot a^2$ rezultă $a = 2$.

24. Fie A numărul multiplilor lui 13 de la 1 la 999999, care nu se divid cu 17. Fie B numărul multiplilor lui 17 de la 1 la 999999, care nu se divid cu 13. Fie C numărul multiplilor lui 13 și 17 de la 1 la 999999. Atunci $A + C$ reprezintă toți multiplii lui 13 mai mici sau egali cu 999999, iar $B + C$ reprezintă numărul multiplilor lui 17 mai mici sau egali cu 999999. Din $A + C > B + C$ avem $A > B$.

25. Notăm cu $s(a)$ suma cifrelor numărului a. Cum $3 \mid 3n$ rezultă că $3 \mid s(3n)$. Cum $s(3n) = s(n)$, rezultă că $3 \mid s(n)$ și deci $3 \mid n$. Avem $9 \mid 3n$ și deci $9 \mid s(3n)$. Cum $s(n) = s(3n)$, rezultă că $9 \mid s(n)$ și deci $9 \mid n$. Nu avem $27 \mid n$ de exemplu pentru $n = 9$.

26. Suma cifrelor numărului $n = 213213213213$ este 24. Numărul m rămas trebuie să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9. Cum m este cât mai mare, atunci $s(m) = 18$ și suma cifrelor șterse va fi 6. Pentru ca m să fie maxim trebuie șterse două cifre de 3. Obținem $n = 2132132121$.