Nicolae Grigore

MATEMATICĂ OLIMPIADE ŞI CONCURSURI ŞCOLARE

Clasa a V-a

Probleme selectate pe unități de învățare cu rezolvări complete

Editura NOMINA

CUPRINS

I. Mulțimea numerelor naturale. Operații în N
Factorul comun

1. Puteri naturale

1. Fie numerele $x = [2^{22} \cdot 4^{23} \cdot 8^{24} \cdot 16^{25} : 32^{32} + (7^8)^5] : \{[(2^5)^2]^8 + 49^{20}\}$ şi
$y = 25^{13} : 5^{26} + 3^{42} : 9^{21} + 4^{21} : 8^{14}$.

a) Arătați că $x + y$ este pătrat perfect.

b) Calculați x^y şi y^x.

Etapa locală, Argeş 2009

2. Fie numerele $a = (2^{98} + 2^{99}) \cdot (5^{99} + 5^{100})$, $b = (2^{99} + 2^{101}) \cdot (5^{98} + 5^{102})$.

a) Comparați numerele.

b) Care este ultima cifră a numărului $a + b$?

Etapa locală, Bihor 2009

3. a) Scrieți următoarele numere în odine crescătoare:
$x = 2^{1653} - 2^{1652} - 2^{1651}$, $y = 3^{993} - 2 \cdot 3^{992} - 2 \cdot 3^{991} - 3^{990}$ şi
$z = 7^{662} + 9 \cdot 7^{660} - 8 \cdot 7^{661}$.

Etapa locală, Cluj 2008, prof. Lucia Iepure

b) Fie $A = \{2^{100} : [4^3 \cdot 2^6 : 2^5 : 2^2 \cdot (4^{11} \cdot 2^{25})^4 : (4^5 \cdot 128)^{11} + (81 : 3^4 - 2008^0) \cdot 2008]^6\}^{14}$. Scrieți numărul A ca o putere cu baza 16.

c) Comparați numerele 17^{14} și $\overline{ab}^{11}$, unde $\overline{ab}$ este cel mai mic număr natural cu proprietatea $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$.

Etapa județeană, Cluj, prof. Cristian Pop

4. Calculați:

a) $10 \cdot \{18^2 : 324 + 2 \cdot [(2^2 \cdot 3)^{15} : (2^{29} \cdot 3^{15}) + 1^{24}]\}$;

b) $(5^{1+2+3+...+20} + 4 \cdot 5^{210}) : 5^{211}$.

Etapa județeană, Harghita 2009

5. Calculați:

a) $N = 8^{666} + [1999^0 + 2^3 \cdot 2^{97} + (3^2)^{51}] : (1 + 4^{50} + 27^{34}) - 4^{999}$;

b) $X = 1996 \cdot 1995 - 1995 \cdot 1994 - 2 \cdot 1994$;

c) $S = 3 + 5 + 7 + ... + 2009 - 2 - 4 - ... - 2008$.

Etapa locală, Harghita 2009

6. Fie $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

a) Pentru a = 10, stabiliți care este cifra miilor numărului A.

b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul A se divide cu 1000.

c) Pentru n găsit anterior, demonstrați că A nu este pătrat perfect.

Etapa locală, Iași 2009

7. Fie $a = [128^{15} \cdot 5^{75} - 125^{25} \cdot (2^{15})^7 + 3^{63}]$, $b = [(7^{45} - 5 \cdot 7^{44} - 97 \cdot 7^{42}) : 5^0]^2$.
Comparați numerele a și b.

Etapa locală, Maramureș 2009, prof. Aurel Băieș

8. Calculați:

a) $14^2 \cdot 729 - 14^2 \cdot 329 - 400$;

b) $[3^7 \cdot 3^{10} + 2^{201} : 2^{106} - 5 \cdot (5^2)^5] : (3^{17} + 2^{95} - 5^{11})$;

c) $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + ... + 2005 + 2006 - 2007 + 2008$.

Etapa locală, Mehedinți 2008

9. Calculați:

a) $2008^{2008^0} - (20^3 - 1^3) \cdot (20^3 - 2^3) \cdot ... \cdot (20^3 - 21^3)$;

b) $2008^2 \cdot 250 - 10^2 \cdot 2 \cdot 1004^2 - 2^7 \cdot 5^2 \cdot 502^2$.

Etapa locală, Prahova 2008, prof. Nicolae Radu

10. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) Suma $S = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2008$ are ultima cifră egală cu 3;

b) $1 + 3 + 5 + ... + 2007 < 2 + 4 + 6 + ... + 2008$.

Etapa locală, Satu Mare, prof. Natalia Danci

11. Fie $a = 4^{1004} - 2^{2007} - 4^{1003} - 2^{2005} - 4^{1002} - 2^{2003} - ... - 2^1 - 4^0$. Aflați numărul n din egalitatea $2008^n - a^{2008} = 2007^a$.

Etapa locală, Teleorman 2008

12. Determinați cifrele a, b, c, d, e cu proprietatea că $\overline{abc}^{\overline{abc}} = 2^{\overline{cde}}$.

Etapa locală, Timiş 2009, prof. Andrei Eckstein

13. Comparaţi numerele: $a = 2^{2011} - 2^{2010} - 2^{2009}$ şi $b = 5^{862} - 4 \cdot 5^{861}$.

Etapa locală, Alba 2010, G.M. 10/2009

14. Calculați: $2 + 2 \cdot (3 + 6 + 9 + ... + 2010) : 671 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2009} - 2^{2010}$.

Etapa locală, Bacău 2010

15. Comparaţi numerele: $a = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008}$ şi $b = 3^{1256} - 2 \cdot 3^{1255}$.

Etapa locală, Bihor 2010

16. Calculaţi:

a) $(3^2 + 2^3 + 2^3 \cdot 5^3 : 10^2) : 3^3$;

b) $27^{101} : \{(3^{10} \cdot 3^{15})^{12} + (9^7 : 3^4)^{30} + [(3^2 \cdot 3^3)^{10}]^6\}$.

Etapa locală, Harghita 2010

17. Fie numerele naturale a, b, c care verifică egalitățile: $a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2$ şi $a + b = 2010$.

a) Să se compare numerele b şi c.

b) Să se calculeze $2 \cdot a + b + c$.

c) Să se calculeze $(a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2)$.

Etapa locală, Galați 2010, prof. Constanța Gusta

18. Se dau numerele $A = 2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} \cdot 3^{n+2}$ şi $B = 5^{n+2} \cdot 7^{n+1} - 5^n \cdot 7^{n+1} - 5^n \cdot 7^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $A < B$.

Etapa locală, Mehedinți 2010

19. Ştiind că $3^2 + 3^3 + 3^4 + ... + 3^{2010} = a \cdot b^2 \cdot (1 + 3^7 + 3^{14} + ... + 3^{2002})$, unde $a, b \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, să se arate că $a + b^6 + 2b^4 + b^3 - b^0 = 2010$.

Etapa locală, Olt 2010, prof. Ion Burcă

20. Comparaţi numerele: $a = (8^5 + 25^3 - 7^{35} : 7^{20}) : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3^{26}$ şi $b = 2^{101} : [(5^{171} : 5^{170} - 3)^{98} + 2^{105} : (2^3 \cdot 2^4) + (2^{11})^9] \cdot 2^{38}$.

Etapa locală, Timiş 2010

21. Comparați numerele:

$$a = 8^{330} \cdot (8^{670} - 128^{287}) \cdot 2 \text{ şi } b = 27^{1000} : [(9^{501} - 81^{250}) : (3^2 - 3^0)].$$

Etapa locală, Tulcea 2010, prof. Lucian Petrescu

22. Se dau numerele: $a = 2^{2009} + 2^{2008} + 2^{2007} + ... + 2^2 + 2 + 1$ şi $b = 4 \cdot (3^{1333} - 3^{1332} + 3^{1331} - 3^{1330} + ... + 3^3 - 3^2 + 3 - 1)$. Să se compare numerele $a + 1$ şi $b + 1$.

Etapa județeană, Vâlcea 2010, prof. Ana Maria Antal

23. Comparați numerele: $a = 5^{39} + 3^{65}$ şi $b = 2^{91} \cdot (1 + 2^{13})$.

Etapa județeană, Vrancea 2010, prof. Enache Pătraşcu

24. a) De câte ori se foloseşte cifra 5 în scrierea numerelor mai mici decât 100? Dar cifra zero?

b) Comparați numerele $a = 160^{552}$ şi $b = 2009^{368}$.

Etapa locală, Arad 2011

25. Într-un acvariu sunt peşti mici, mijlocii, mari şi un peşte uriaş. Fiecare peşte mijlociu înghite 5 peşti mici, fiecare peşte mare înghite 6 peşti mijlocii, iar peştele uriaş înghite 7 peşti mari. Câți peşti a înghițit în total peştele uriaş?

Etapa locală, Arad 2011

26. a) Să se calculeze: $1 + 2 + 3 + ... + 2011$.

b) Suma mai multor numere naturale distincte este egală cu 2023067. Să se arate că cel puțin unul dintre aceste numere este mai mare decât 2011.

Etapa locală, Bacău 2011

27. Fie numerele $a = 1 + 6 + 6^2 + 6^3 + ... + 6^{59}$ şi $b = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{79}$. Să se compare numerele $5 \cdot a$ şi $4 \cdot b$.

Etapa locală, Bacău 2011

28. a) Calculați $m = (2a - b - c)^{1907}$ ştiind că:

$a = (25^n : 5^n - 5^n + 3^4 - 4^3 - 17) \cdot [(2^5 - 5^2 - 7) : 1993] + 1993$,

$b = 32 \cdot 1992^5 - 3984^5 + 2^3 \cdot 3 \cdot 83$,

$c = 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4$.

b) Comparați următoarele puteri: $a = 2^{n+2} + 3 \cdot 2^{n+1} - 9 \cdot 2^n$ şi $b = 2^{n+1} \cdot 5^n - 10^n$, unde n este număr natural.

Etapa locală, Bistrița-Năsăud 2011, prof. Nastasia Chiciudean

29. Se dau numerele: $a = 2^{335} - 2^{334} - 2^{333}$, $b = 3^{224} - 3^{223} - 3^{222}$, $c = 4^{113} - 4^{112} - 4^{111}$.
Scrieți în ordine crescătoare numerele a, b şi x unde $x = c : 11$.

Etapa locală, Covasna 2011

30. Comparați numerele $a^{\overline{bb}}$ şi $b^{\overline{aa}}$ cu $a \neq b$, ştiind că $a^3 = b^2$.

Etapa locală, Dolj 2011, G.M. 10/2010

31. Fie numerele:
$a = 4 - \{5^3 - [100 - (9^2 : 3^4 + 3) \cdot 5 + 2^3 \cdot 5] - 5\} \cdot 125$ şi
$b = 2^{4^2} + 3^9 : 9^4 \cdot 3 - (2^2)^8 + 2^{10} : (3 \cdot 2^5 + 2^5) - (2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}) : (2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{10})$.
Să se afle cifra x ştiind că $(\overline{ba} - \overline{a5}) \cdot \overline{b5} - \overline{b0} = \overline{aax}$.

Etapa locală, Harghita 2011, prof. Diana Szász

32. Calculați valoarea expresiei: $a^2 + 3ab - 3ac + d^2$, dacă $a = 7$, $b - c = 10$ şi
$d = 10^3 : \{123 + 34 : [(2 \cdot 3^2)^2 : 18 - 17^0 \cdot 1^{215}]\} + 1$.

Etapa locală, Harghita 2011, prof. Maria B. Csatloş

33. Fie $m = 2010^3 - 2010^2 \cdot 2009 - 2010 \cdot 2009 - 2009$ şi
$n = 1004 \cdot 2010 + 1005 \cdot 2010 + 2009$ două numere naturale.
a) Scrieți numărul n ca un produs de două numere impare consecutive.
b) Calculați valoarea expresiei $m^m + m^n$.

Etapa locală, Harghita 2011, prof. Jolán Csuszner

34. Ordonați crescător numerele: $A = 3^{333} - 2 \cdot 3^{332} - 2 \cdot 3^{331} - 3^{330}$,
$B = 2^{553} - 2^{552} - 2^{551}$, $C = 2 \cdot 5^{220}$.

Etapa locală, Iaşi 2011

35. Se consideră $n = 3^5 \cdot 17^5 - 51^5 + 11^0$ şi $m = (5^{11} : 25^5)^{2011} : 125^{670}$.
Comparați numerele m şi n^{2011}.

Etapa locală, Ialomița 2011

36. Aflați x din egalitatea:
$x + [1^5 + (5^3)^9 : 125 + (5^2)^9 - 5^{24} - 125^6] \cdot 2001 = 1 + 2 + ... + 2001$.

Etapa locală, Mureş 2011, prof. A. Bălăucă

37. Se dau numerele:

$$x = \{27 + [36 - (28 - 175 : 25) : 7] \cdot 4\} : 159,$$
$$y = (2011^{2012} : 2011^{2011} : 2012^0) - (125 \cdot 11111^3 - 55555^3),$$
$$a = 3 + (3^x)^2 + 3^{x+y} + (3^y)^2 - 3^{x:y}.$$

a) Calculați numerele x și y.

b) Arătați că numărul a^{2011} este cub perfect.

Etapa locală, Sibiu 2011, prof. Liviu Ardelean

38. Se dau numerele A și B, definite astfel:

$A = (4^5 \cdot 8^3)^{10} : 16^5 + (27^9 \cdot 81^2)^2 : 9^{10}$; $B = 32^{34} + 9^{25} + p^{2011}$, $p \in \mathbb{N}$.

a) Scrieți numărul A sub forma $A = 2^m + 3^n$, $m, n \in \mathbb{N}$.

b) Determinați numărul p, astfel încât A = B.

c) Dacă $x = (m + n + p - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^{2011}$, calculați suma cifrelor numărului x.

Etapa locală, Teleorman 2011

39. a) Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 1005$, atunci să se scrie numărul $2011 \cdot a$, ca sumă a 2011 numere naturale consecutive.

b) Scrieți numărul 2011^{2011} ca sumă a 2011 numere naturale consecutive.

Etapa locală, Teleorman 2011

40. a) Diferența a două numere naturale nenule este 2006. Dacă se dublează unul dintre ele, atunci diferența devine 1003. Aflați numerele.

b) Produsul a două numere naturale nenule este 420. Dacă se mărește unul dintre numere cu 3, atunci produsul devine 483. Aflați numerele.

Etapa județeană, Ialomița 2011

41. Determinați numărul natural n pentru care:

$$(n \cdot n^5 \cdot n^{5^2} \cdot \ldots \cdot n^{5^{2010}})^4 = 5^{5^{2011}} : (1^5 + 5^0 + 1^{5^{2011}} + 5^{0^{2011}} + 2011^{0^5}).$$

Etapa județeană, Iași 2011

42. Calculați $A = x^2 - y^3 + z^2$, știind că: $x = (2012^2 - 2012 - 2011) : 2011 - 2008$; $y = (3^{1+2+3+\ldots+20} + 2 \cdot 3^{210}) : 3^{211}$, iar z este numărul natural din egalitatea:

$$2 + 3 \cdot \{z + 5[(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5)^2 : (2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) - 6]\} = 14.$$

Etapa locală, Alba, 2012

43. Se consideră numerele $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2011}$ şi $B = 16^{503}$. Calculați $B - A$.

Etapa locală, Sibiu, 2012

44.a) Care este valoarea de adevăr a propoziției: $2^3 \cdot 3 < 5^2 < 3^3$?

b) Să se arate că:

i) $4^{30} \cdot 3^{20} < 5^{40}$; ii) $5^{66} < 3^{99}$; iii) $2^{6018} < 3^{4012}$.

Etapa locală, Satu Mare, 2012, prof. Ovidiu Pop

45. Fie numerele: $a = 2^{n+3} \cdot 3^n + 2^{n+1} \cdot 3^{n+2}$ şi $b = 2^{2n+5} \cdot 3^{n+1} + 4^{n+1} \cdot 3^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $13 \cdot b : a$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel ca $b = 20 \cdot a + 288$.

Etapa locală, Vrancea, 2012, prof. Vasile Tarciniu

46.a) Comparați numerele: $A = \overline{2abc} - \overline{bc} - 2^2 \cdot 5^2 \cdot a + 5$ şi $B = 32 \cdot 11^5 - 22^5 + 45$.

b) Aflați numărul $\overline{ab}$ dacă $12 + 12 \cdot 3 + 12 \cdot 5 + \ldots + 12 \cdot 23 = (\overline{ab} + 1)^3$.

Etapa locală, Ialomița, 2012

47. Dacă $a = (2 \cdot 81^{150} + 8^{42}) : (32^{25} + 27^{200})$, determinați $(a - 1)^{2012} + 2012^{a-2}$.

Etapa locală, Ilfov, 2012, prof. Ilie Vizitiu

48. O celulă se divide în două noi celule în două ore. Determinați numărul de celule care se formează în 36 ore, pornind de la două celule care se divid.

Etapa locală, Ilfov, 2012, prof. Cristina Godeanu-Matei

49. Comparați numerele: $a = (4^{10} - 4^9) \cdot (4^9 - 4^8) \cdot \ldots \cdot (4^2 - 4^1)$ şi $b = 3 \cdot 2^{90} \cdot 81^2$.

Etapa locală, Bacău, 2012

50. Calculați $(b + 2c)(c - a)(2a + b)$, ştiind că $a + b + c = 31$ şi $2a + 3b + 4c = 105$.

Etapa locală, Iaşi, 2012, prof. Nicolae Ivăşchescu,

Revista „Micii Matematicieni” nr. 5/2011

51. a) Calculați $(2^5 \cdot 2^8)^4 : 32^9 - 81^7 : 27^6 : 9^4$.

b) Comparați numerele $a = 3^{2012}$ şi $b = 4^{603} \cdot 5^{804}$.

Etapa locală, Dâmbovița, 2012, prof. Cristian Grecu

SOLUȚII

I. Mulțimea numerelor naturale. Operații în N. Factorul comun

1. Puteri naturale

1. a) $x = 1$, $y = 3$, $x + y = 4 = 2^2$ este pătrat perfect; b) $x^y = 1^3 = 1$, $y^x = 3^1 = 3$. **2.** $a = 2^{98}(1 + 2) \cdot 5^{98}(5 + 5^2) = (2 \cdot 5)^{98} \cdot 3 \cdot 30 = = 10^{98} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 10 = 9 \cdot 10^{99}$; $b = 2^{99}(1 + 2^2) \cdot 5^{98}(5 + 5^4) = 2^{99} \cdot 5^{98} \cdot 5 \cdot 630 = 10^{99} \cdot 630 \Rightarrow a < b$. **3.** a) $x = 2^{1651} \cdot (4 - 2 - 1) = 2^{1651}$, $y = 3^{992}(3 - 2) - 2 \cdot 3^{991} - 3^{990} = 3^{991} - 3^{990} = 2 \cdot 3^{990}$; $x = 2 \cdot 2^{1650} = 2 \cdot (2^5)^{330} = 2 \cdot 32^{330}$ (1); $y = 2 \cdot (3^3)^{330} = 2 \cdot 27^{330}$ (2); $z = 2 \cdot (7^2)^{330} = 2 \cdot 49^{330}$, (3). Din (1), (2), (3) rezultă că $y < x < z$; b) $A = \{2^{100} : (2^5 \cdot 2^{188} : 2^{187} + 0)^6\}^{14} = 2^{100} : 2^{84} = 2^{16} = (2^4)^4 = 16^4$; c) $\overline{ab} - \overline{ba} = 18 \Rightarrow 9(a - b) = 18 \Rightarrow a - b = 2$ şi $\overline{cb}$ cel mai mic $\Rightarrow \overline{ab} = 31$; $17^{14} > 16^{14} = 2^{56} > 2^{55} = (2^5)^{11} > 31^{11}$. **4.** a) 70; b) 1. **5.** $N = (2^3)^{666} + (1 + 2^{100} + 3^{102}) : (1 + 2^{100} + + 3^{102}) - 2^{1998} = 2^{1998} + 1 - 2^{198} = 1$; $x = 1995(1996 - 1994) - 2 \cdot 1994 = = 2(1995 - 1994) = 2$; $S = \underbrace{(3-2)+(5-4)+(7-6)+\ldots+(2009-2008)}_{1004\text{ ori}} = 1004$. **6.** a) $n = 10 \Rightarrow A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 10 = 10! = 518400$, cifra miilor este 8; b) $1000 \mid A \Rightarrow$ ultimele trei cifre sunt zerouri $\Rightarrow A = n!$ are ca factor pe $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ iar factorul 5 apare câte o singură dată la 5, 10 şi 15 $\Rightarrow n = 15$ cel mai mic; c) Cum A se termină cu trei zerouri, el nu poate fi pătrat perfect. **7.** $a = (2^{105} \cdot 5^{75} - 5^{75} \cdot 2^{105} + 3^{63})^2 = 3^{126} = (3^3)^{42} = 27^{42}$ (1); $b = [7^{42} \cdot (343 - 254 - 97) : 1]^2 = = (7^{42})^2 = (7^2)^{42} = 49^{42}$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow a < b$. **8.** a) $14^2(729 - 329) - 400 = 400(14^2 - 1) = = 78000$; b) $(3^{17} + 2^{95} - 5^{11}) : (3^{17} + 2^{95} - 5^{11}) = 1$; c) $(1 + 2 - 3) + (4 + 5 - 6) + (7 + 8 - 9) + + (10 + 11 - 12) + \ldots + (2005 + 206 - 2007) + 2008 = (3 + 6 + 9 + \ldots + 2004) + 2008 = 3(1 + + 2 + 3 + \ldots + 668) + 2008 = 3 \cdot 334 \cdot 669 + 2008 = 672346$. **9.** a) Conține factorul $20^3 - 20^3 = 0$. Deci produsul este 0; $2008^{2008^0} - 0 = 2008$; b) $1004^2 \cdot 2^2 \cdot 250 - 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 1004^2 - 2^5 \cdot 2^2 \cdot \cdot 5^2 \cdot 502^2 = 1004^2 \cdot 2^3 \cdot 5^3 - 1004^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 - 1004^8 \cdot 2^5 \cdot 5^2 = 1004^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot (5 - 1 - 2^2) = 0$. **10.** a) Pentru $n < 5$, $U(5) = U(1 + 2 + 6 + 4) = 3$. Pentru $n \geq 5$, $U(n!) = 0$, deci $U(S) = 3$. Propoziția este adevărată; b) $1 + 3 + 5 + \ldots + 2007 < 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 1004) \Leftrightarrow 1004^2 < 1004 \cdot 1005$ (A). **11.** $a = 2^{2008} - 2^{2007} - 2^{2006} - 2^{2005} - 2^{2004} - 2^{2003} - \ldots - 2 - 1$; $2^{2008} - 2^{2007} = = 2^{2007}(2 - 1) = 2^{2007}$; $2^{2007} - 2^{2006} = 2^{2006}(2 - 1) = 2^{2006}$; .... ; $2^3 - 2^2 = 2^2(2 - 1) = 2^2$; $2^2 - 2 = 2$; $a = 2 - 1 = 1$; $2008^n - 1^{2008} = 2007^1 \Rightarrow 2008^n = 2008 \Rightarrow n = 1$. **12.** $\overline{abc}^{\,\overline{abc}} = 2^{\overline{abc}} \Rightarrow \overline{abc} = m_2$ şi mai mult o putere a lui 2 număr de trei cifre; $\overline{abc} \in \{2^7, 2^8, 2^9\} = \{128, 256, 502\}$. Avem $128^{128} = (2^7)^{2^7} = 2^{896} \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 8, d = 9$ şi $e = 6$; $256^{256} = (2^8)^{256} = 2^{2048} > 2^{\overline{cde}}$. Deci $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 8, 9, 6)$. **13.** Din $a = 2^{2009}(2^2 - 2 - 1) = 2^{2009} = (2^7)^{287} = 128^{287}$ şi $b = = 5^{861}(5 - 4) = 5^{861} = (5^3)^{287} = 125^{287} \Rightarrow a > b$. **14.** $2 + 2 \cdot 3(1 + 2 + 3 + \ldots + 670) : 671 + 2^{2010} - - 2 - 2^{2010} = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{670 \cdot 671}{2} : 671 = 2010$. **15.** Din $a = 2^{2008} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{2008} = (2^8)^{251} = = 256^{251}$ şi $b = 3^{1255} \cdot (3 - 2) = 3^{1255} = (3^5)^{251} = 243^{251} \Rightarrow a > b$. **16.** a) $(9 + 8 + 10^3 : 10^2) : 27 = 1$; b) $3^{303} : (3^{300} + 3^{300} + 3^{300}) = 3^{303} : 3^{301} = 3^2 = 9$. **17.** a) $c \cdot (a + b) = b(a + b) \Leftrightarrow 2010c = 2010b$;

b) $2a + b + b = 2(a + b) = 2 \cdot 2010 = 4020$; c) $b = c \Rightarrow$ factorul $b^2 - c^2 = 0$, deci produsul $(a^2 + a \cdot b + b^2)(b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2) = 0$. **18.** Din $A = 2^n \cdot 3^{n+1} \cdot (1 + 2^2 + 2^2 \cdot 3) = 17 \cdot 2^n \cdot 3^{n+1}$ și $B = 5^n \cdot 7^{n+1} \cdot (5^2 - 1 - 7) = 17 \cdot 5^n \cdot 7^{n+1} \Rightarrow A < B$.

19.
$$\begin{array}{l} S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{2010} \mid \cdot 3 \\ 3S_1 = 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{2010} + 3^{2011} \quad - \\ \hline 2S_1 = 3^{2011} - 3^2 \Rightarrow S_1 = \dfrac{3^{2011} - 3^2}{2} \end{array} ; \qquad \begin{array}{l} S_2 = 1 + 3^7 + 3^{14} + \ldots + 3^{2002} \mid \cdot 3^7 \\ 3^7 \cdot S_2 = 3^7 + 3^{14} + 3^{21} + \ldots + 3^{2009} \quad - \\ \hline (3^7 - 1)S_2 = 3^{2009} - 1 \Rightarrow S_2 = \dfrac{3^{2009} - 1}{3^7 - 1}. \end{array}$$

Avem $\dfrac{3^{2011} - 3^2}{2} = a \cdot b^2 \cdot \dfrac{3^{2009} - 1}{3^7 - 1} \Bigg| : 3^{2009} - 1 \Rightarrow \dfrac{9}{2} = \dfrac{a \cdot b^2}{3^7 - 1} \Rightarrow a \cdot b^2 = \dfrac{9(3^7 - 1)}{2} = 9 \cdot 1093 = 1093 \cdot 3^2$. Cum 1093 este număr prim $\Rightarrow a = 1093$ și $b = 3$. Atunci $a + b^6 + 2b^4 + b^3 - b^0 = 2010 \Leftrightarrow 1093 + 729 + 162 + 27 - 1 = 2010$ (A). **20.** Din $a = (2^{15} + 5^6 - 7^{15}) : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3^{26} = 3^{26} = (3^2)^{13} = 9^{13}$ și $b = 2^{101} : (2^{98} + 2^{98} + 2^{99}) \cdot 2^{38} = 2^{101} : 2^{100} \cdot 2^{38} = 2^{39} = (2^3)^{13} = 8^{13} \Rightarrow a > b$. **21.** Din $a = 2^{990} \cdot (2^{2010} - 2^{2009}) \cdot 2 = 2^{990} \cdot 2^{2009} \cdot 2 = 2^{3000} = (2^3)^{1000} = 8^{1000}$ și $b = 3^{3000} : (3^{1002} - 3^{1000}) : 8 = 3^{3000} : 3^{1000} \cdot 8 : 4 = 3^{2000} = (3^2)^{1000} = 9^{1000} \Rightarrow a < b$. **22.** $a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2008} + 2^{2009} \mid \cdot 2$, (1); $2a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{2009} + 2^{2010}$, (2). Se scad relațiile (1) și (2) $\Rightarrow a = 2^{2010} - 1 \Rightarrow a + 1 = 2^{2010}$; $b = 4 \cdot 3^{1333} - 4 \cdot 3^{1332} + 4 \cdot 3^{1331} - 4 \cdot 3^{1330} + \ldots + 4 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4$ scriem $4 = 3 - 1$; $b = (3 + 1) \cdot 3^{1333} - (3 + 1) \cdot 3^{1332} + (3 + 1) \cdot 3^{1331} + \ldots + (3 + 1) \cdot 3^3 - (3 + 1) \cdot 3^2 + (3 + 1) \cdot 3 - (3 + 1) \Rightarrow b = 3^{1334} + 3^{1333} - 3^{1333} - 3^{1332} + 3^{1332} + 3^{1331} + \ldots + 3^4 + 3^3 - 3^2 + 3^2 + 3 - 3 - 1 \Rightarrow b = 3^{1334} - 1 \Rightarrow b + 1 = 3^{1334}$; avem $a + 1 = 2^{2010} < (2^3)^{667} = 8^{667} < (3^2)^{667} = 9^{667} = 3^{1334} = b + 1 \Rightarrow a + 1 < b + 1$. **23.** $a = (5^3)^{13} + (3^5)^{13} = 125^{13} + 243^{13}$ și $b = 2^{91} + 2^{104} = (2^7)^{13} + (2^8)^{13} = 128^{13} + 256^{13}$. Dar $125^{13} < 128^{13}$; $243^{13} < 256^{13}$. Dacă se adună aceste ultime două relații, se obține $a < b$. **24.** a) La unități cifra 5 se folosește pentru scrierea numerelor mai mici decât 100, de 10 ori, iar la zeci de 9 ori. Deci cifra 5 se folosește pentru scrierea numerelor mai mici decât 100 de $10 + 9 = 19$ ori; b) Din $a = 160^{552} = (160^3)^{184} = (4096000)^{184}$ și $b = 2009^{368} = (2009^2)^{184} = (4036081)^{184} \Rightarrow a > b$ sau, comparăm numerele 160^3 cu 2009^2; $160^3 > 28^3 = (2^7)^3 = 2^{21} = 8^7 > 7 \cdot 7^7 = 7^8 = (7^4)^2 > 2009^2 \Rightarrow a > b$. **25.** Peștele uriaș înghite $7 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 \cdot 5 = 259$ pești sau: 7 pești mari vor înghiți $7 \cdot 6 = 42$ pești mijlocii; 42 pești mijlocii vor înghiți $42 \cdot 5 = 210$ pești mici. Peștele uriaș înghite $210 + 42 + 7 = 259$ pești. **26.** a) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2011 = 2011 \cdot 1006 = 2023066$; b) Numerele fiind distincte, cu suma 2023067, ele pot fi 1, 2, 3, ..., 2011. Cum $S = 2023066 < 2023067$, rezultă că cel puțin unul dintre ele este mai mare decât 2011. Numerele sunt 1, 2, 3, ..., 2010, 2012. **27.**

$$\begin{array}{l} a = 1 + 6 + 6^2 + \ldots + 6^{59} \mid \cdot 6 \\ 6a = 6 + 6^2 + 6^3 + \ldots + 6^{60} \quad - \\ 5a = 6^{60} - 1 \end{array} ; \qquad \begin{array}{l} b = 1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{79} \mid \cdot 5 \\ 5b = 5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^{80} \quad - \\ \hline 4b = 5^{80} - 1 \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} 5 \cdot a = (6^3)^{20} - 1 = 216^{20} - 1 \\ 4 \cdot b = (5^4)^{20} - 1 = 625^{20} - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5 \cdot a < 4 \cdot b$. **28.** a) $a = (5^{2n} : 5^n - 5^n + 81 - 64 - 17) \cdot [(3^2 - 25 - 7) : 1993] + 1993 = 1993$; $b = 2^5 \cdot 1992^5 - 2^5 \cdot 1992^5 + 24 \cdot 83 = 24 \cdot 83 = 1992$; $c = 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4 = 1994$. Atunci $m = (2 \cdot a - b - c)^{1907} = (2 \cdot 1003 - 1992 - 1994)^{2007} = 0^{2007} = 0$; b) Din $a = 2^n \cdot (2^2 + 3 \cdot 2 - 9) = 2^n$ și $b = 2 \cdot 2^n \cdot 5^n - 10^n = 10^n(2 - 1) = 10^n \Rightarrow a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$ și $a = b$, dacă $n = 0$. **29.** Numerele a, b, c se pot scrie: $a = 2^{333} \cdot (4 - 2 - 1) = 2^{333} = (2^3)^{111} = 8^{111}$; $b = 3^{222} \cdot (9 - 3 - 1) = 5 \cdot 3^{222} = 5 \cdot (3^2)^{111} = 5 \cdot 9^{111}$; $c = 4^{111} \cdot (16 - 4 - 1) = 11 \cdot 4^{111}$;

$x = c : 11 = 11 \cdot 4^{111} : 11 = 4^{111}$. Din toate aceste relații rezultă $4^{111} < 8^{111} < 5 \cdot 9^{111} \Rightarrow x < a < b$. **30.** $a \neq b$, a și b cifre, cu $a^3 = b^2 \Rightarrow a < b$; $a^3 \in \{1, 8, 27, 64, 125, 216, 512, 729\} \Rightarrow b^2 \in \{64,$ $729\} \Rightarrow b = 8$ și $a^3 = 64 = 4^3 = 4$. Avem 4^{88} și 8^{44}; $\left.\begin{matrix} a^{\overline{bb}} = 4^{88} = (2^2)^{88} = 2^{176} \\ b^{\overline{aa}} = 8^{44} = (2^3)^{44} = 2^{132} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^{\overline{bb}} > b^{\overline{aa}}$.

31. $a = 4 - \{125 - [100 - (1 + 3) \cdot 5 + 40] - 5\} \cdot 125 = 4 - [125 - (100 - 20 + 40) - 5] \cdot 25 =$ $= 4 - (125 - 125) \cdot 125 = 4 - 0 \cdot 125 = 4$; $b = 2^{16} + 3^9 : 3^8 \cdot 3 - 2^{16} + 2^{10} : (2^5 \cdot 4) - 2^2 \cdot 3$; $b =$ $= 3^2 + 2^{10} : 2^7 - 12 = 9 + 8 - 12 = 17 - 12 = 5$. Atunci $(\overline{ba} - \overline{a5}) \cdot \overline{b5} - \overline{b0} = \overline{aax} \Leftrightarrow (54 - 45) \cdot$ $\cdot 55 - 50 = \overline{44x} \Leftrightarrow 440 + x = 9 \cdot 55 - 50 \Leftrightarrow 440 + x = 495 - 50 \Leftrightarrow 440 + x = 445 \Rightarrow x = 5$. **32.** Vom calcula numărul d; $d = 1000 : [123 + 34 : (324 : 18 - 1)] + 1 = 1000 : (123 + 34 : 17) +$ $+ 1 = 1000 : (123 + 2) + 1 = 1000 : 125 + 1 = 9$. Expresia este egală cu: $a^2 + 3a \cdot (b - c) + d^2 =$ $= 7^2 + 3 \cdot 7 \cdot 10 + 9^2 = 49 + 210 + 81 = 340$. **33.** Scriem $2009 = 2010 - 1$; atunci $m = 2010^3 -$ $- 2010^2 \cdot (2010 - 1) - 2010 \cdot (2010 - 1) - (2010 - 1)$; $m = 2010^3 - 2010^3 + 2010^2 - 2010^2 +$ $+ 2010 - 2010 + 1 = 1$; a) $n = 2010 \cdot (1004 + 1005) + 2009 = 2010 \cdot 2009 + 2009$; $n = 2009 \cdot$ $\cdot (2010 + 1) = 2009 \cdot 2011$ produs de două numere naturale impare; b) $n^m + m^n = (2009 \cdot 2011)^1 +$ $+ 1^{2009 \cdot 2011} = 2009 \cdot 2011 + 1 = 4040100$. **34.** $A = 3^{330} \cdot (3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 1) = 2 \cdot 3^{330} =$ $= 2 \cdot (3^3)^{110} = 2 \cdot (3^3)^{110} = 2 \cdot 27^{110}$; $B = 2^{551} \cdot (2^2 - 2 - 1) = 2^{551} = 2 \cdot 2^{550} = 2 \cdot (2^5)^{110} = 2 \cdot 32^{110}$;

$\left.\begin{matrix} A = 2 \cdot 27^{110} \\ C = 2 \cdot (5^2)^{110} = 2 \cdot 25^{110} \\ B = 2 \cdot 32^{110} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 25^{110} < 2 \cdot 27^{110} < 2 \cdot 32^{110} \Rightarrow C < A < B$. **35.** $n = (3 \cdot 17)^5 -$ $- 51^5 + 1 = 51^5 - 51^5 + 1 \Rightarrow n = 1$; $m = (5^{11} : 5^{10})^{2011} : (5^3)^{670} = 5^{2011} : 5^{2010} = 5$; $\left.\begin{matrix} m = 5 \\ n^{2011} = 1^{2011} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow n^{2011} < m$. **36.** $x + (1 + 5^{27} : 5^3 + 5^{18} - 5^{24} - 5^{18}) \cdot 2001 = 2001 \cdot 1001 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + (1 + 5^{24} - 5^{24} + 5^{18} - 5^{18}) \cdot 2001 = 2001 \cdot 1001 \Leftrightarrow x + 2001 = 2001 \cdot 1006 \Rightarrow x =$ $= 2001(1001 - 1) \Rightarrow x = 2001 \cdot 1000 \Rightarrow x = 2001000$. **37.** a) $x = \{27 + [36 - (28 - 7) : 7] \cdot 4\} :$ $: 159$; $x = [27 + (36 - 3) \cdot 4] : 159 = (27 + 33 \cdot 4) : 159 = 1$; $y = 1 - (5^3 \cdot 11111^3 - 55555^3) = 1 -$ $- (55555^3 - 55555^3) = 1$; b) Atunci $a = 3 + (3^1)^2 + 3^{1+1} + (3^1)^2 - 3^{1:1} = 3 + 3^2 + 3^2 + 3^2 - 3 =$ $= 27 = 3^3$; $a^{2011} = 27^{2011} = (3^3)^{2011} = (3^{2011})^3$ este cub perfect. **38.** a) $A = (2^{10} \cdot 2^9)^{10} : 2^{20} + (3^{27} \cdot$ $\cdot 3^8)^2 : 3^{20} = 2^{190} : 2^{20} + 3^{70} : 3^{20} = 2^{170} + 3^{50} = 2^m + 3^n$, cu $m = 170$ și $n = 50$; $B = (2^5)^{34} +$ $+ (3^2)^{25} + p^{2011} = 2^{170} + 3^{50} + p^{2011}$, $p \in \mathbb{N}$. Din $B = A \Rightarrow 2^{170} + 3^{50} + p^{2011} = 2^{170} + 3^{50} \Rightarrow p^{2011} =$ $= 0 \Rightarrow p = 0$. **39.** a) Fie numerele consecutive $x + 1, x + 2, x + 3, ..., x + 2011$; $(x + 1) + (x +$ $+ 2) + ... + (x + 2011) = 2011 \cdot a$ cu $a \geq 1005 \Leftrightarrow 2011x + (1 + 2 + 3 + ... + 2011) = 2011 \cdot a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2011x + 2011 \cdot 1006 = 2011 \cdot a \Leftrightarrow 2011 \cdot x = 2011(a - 1006) \Rightarrow x = a - 1006$ cu $a \geq 1005$. Atunci $2011 \cdot a = (a - 1005) + (a - 1004) + (a - 1003) + ... + (a + 1003) + (a + 1004) + (a +$ $+ 1005)$; b) $2011^{2011} = 2011 \cdot x + 2011 \cdot 1006 \Leftrightarrow 2011x = 2011^{2011} - 2011 \cdot 1006 \Rightarrow x =$ $= 2011^{2010} - 1006$. Deci $2011^{2011} = (2011^{2010} - 1005) + (2011^{2010} - 1004) + (2011^{2010} - 1003) +$ $+ ... + (2011^{2010} + 1003) + (2011^{2010} + 1004) + (2011^{2010} + 1005) = 2011^{2010} \cdot 2011$. **40.** $a - b =$ $= 2006$; a) Cum diferența se micșorează, rezultă că scăzătorul se dublează $\Rightarrow a - 2b = 1003 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 1003 + 2b \Rightarrow 1003 + 2b - b = 2006 \Rightarrow b = 1003$ și $a = 3009$; b) Fie x și y cele două numere $\Rightarrow x \cdot y = 420$ și y se mărește cu trei $\Rightarrow x(y + 3) = 483 \Rightarrow 420 + 3x = 483 \Rightarrow 3x =$ $= 63 \Rightarrow x = 21$ și $y = 420 : 21 \Rightarrow y = 20$. **41.** Vom aplica regula de calcul cu puteri și aflarea